BIBLIOTECA PROFESORULUI DE FIZICĂ

GABRIELA CONE, GH. STANCIU, ȘT. TUDORACHE

PROBLEME DE FIZICĂ PENTRU LICEU

MECANICĂ, TERMODINAMICĂ, FIZICĂ MOLECULARĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
1986

PROBLEMS OF PHYSICS FOR HIGH SCHOOLS

MECHANICS, THERMODYNAMICS, MOLECULAR PHYSICS

ЗАДАЧИ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ

МЕХАНИКА, ТЕРМОДИНАМИКА, МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R 79717, Bucureşti, Calea Victoriei nr. 125

PREFAŢĂ

Culegerea de probleme de fizică elaborată de Gabriela F. Cone, Gheorghe A. Stanciu şi Ştefan St. Tudorache cuprinde 544 probleme de mecanică, fizică moleculară şi termodinamică, propuse de autori. Pentru toate problemele prezentate se dau soluţii explicative.

Această lucrare pune la dispoziţia profesorilor de liceu, elevilor de liceu şi a viitorilor candidaţi la concursurile de admitere în învăţămîntul superior universitar, politehnic, medico-farmaceutic şi economic, un material de bază pentru înţelegerea şi aprofundarea lecţiilor de mecanică, fizică moleculară şi termodinamică predate în liceu.

Nivelul ştiinţific al problemelor concepute de autori şi modul de prezentare scot în evidenţă faptul că au fost consultate lucrări bine reputate şi că autorii au o experienţă deosebită în elaborarea de culegeri de probleme. Forma de prezentare aleasă pretinde cititorului, aşa cum se cuvine, o participare activă la dialogul cu autorii. Sistematizarea este astfel făcută, încît, problemele prezentate la început au un grad mai redus de dificultate, iar apoi din ce în ce mai ridicat. Procedînd în acest mod, sînt uşurate înţelegerea aprofundată şi fixarea cunoştinţelor teoretice. De asemenea, se asigură formarea deprinderii de a depăşi dificultăţile şi de a dezvolta îndemînarea de a rezolva probleme de fizică la nivelul actualelor manuale din liceu şi al celor care se dau la concursurile de admitere în învăţămîntul superior.

Deoarece autorii au indicat toate rezolvările, este posibil ca elevii şi absolvenţii de liceu să lucreze, mai întîi, independent şi, apoi, să se autocontroleze.

Rezolvarea unor probleme este mai simplă dacă se folosesc cunoştinţele de matematică dobîndite de elevi în ultimele clase de liceu (calcul diferenţial şi integral).

Autorii, prezentînd un material variat, au urmărit şi completarea culturii generale de fizică a elevilor, menţinînd totuşi nivelul şi limitele programei analitice din liceu.

În speranţa completării actualei programe analitice de fizică din liceu prin introducerea unor concepte care sînt strict necesare pentru întregirea cunoştinţelor de fizică predate în prezent, autorii au introdus şi probleme ce conţin noţiuni care nu sînt definite în actualele manuale

(de exemplu, grad de libertate, entropie etc.), precum și probleme referitoare la noțiuni cuprinse în manuale dar neincluse în programele de concurs pentru treptele de liceu și pentru admiterea în învățămîntul superior (de exemplu, mișcarea de rotație a rigidului, conservarea momentului cinetic ș.a.). În ajutorul celor care doresc să rezolve și aceste probleme, pentru a-și completa cunoștințele pe care le au, se recomandă să se consulte în afară de manuale și lucrările : Fizică, (autori : *Francis W. Sears, Mark W. Zemansky, Hugh D. Joung), Editura didactică și pedagogică, București — 1983*; **Cursul de fizică Berkeley :** *volumul I :* Mecanica (autori : *Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman), Editura didactică și pedagogică, București — 1981; volumul III :* Unde (*autor : Frank S. Crawford, Jr), Editura didactică și pedagogică, București — 1983; volumul V :* Fizică statistică (*autor : F. Reif) Editura didactică și pedagogică, București — 1983.*

Calitățile intrinseci, amintite mai înainte, ale acestei lucrări, ne îndreptățesc să credem că va avea o audiență largă și un succes bine meritat.

Explicațiile riguros științifice date la rezolvarea problemelor și claritatea prezentării fac din această carte o lucrare de valoare prin care literatura didactică românească își îmbogățește patrimoniul.

Prof. dr. ing. ION M. POPESCU
Catedra de Fizică
Institutul politehnic din București

CUPRINS

Capitolul 1

MECANICĂ

1.1. Cinematica mişcării rectilinii uniforme

ENUNŢURI

• **1.1.** Un automobil a parcurs prima jumătate de drum cu viteza $v_1 = 40$ km/h şi pe cea de a doua cu viteza $v_2 = 60$ km/h. Să se determine viteza medie a automobilului pe întreaga porţiune de drum.

• **1.2.** Un vehicul se deplasează în prima jumătate a timpului total de mişcare cu viteza $v_1 = 20$ m/s după o direcţie ce face unghiul $\alpha_1 = 60°$ cu axa Ox şi a doua jumătate cu viteza $v_2 = 40$ m/s, orientată după o direcţie care face unghiul $\alpha_2 = 120°$ cu axa Ox. Să se calculeze viteza medie a vehiculului.

• **1.3.** Două bărci se deplasează pe suprafaţa unui lac în acelaşi sens cu vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ ale căror direcţii fac unghiul α. Să se determine viteza relativă a unei bărci faţă de cealaltă şi distanţa dintre ele la un moment de timp oarecare.

• **1.4.** Să se determine timpul în care un pasager aflat la fereastra unui tren care se deplasează cu viteza $v_1 = 54$ km/h vede un tren care se deplasează în sens opus cu viteza $v_2 = 36$ km/h, dacă lungimea ultimului tren este $l = 150$ m.

1.5. Două rigle AB şi CD care formează între ele un unghi α au mişcări de translaţie cu vitezele $\vec{v}_1$ şi $\vec{v}_2$ prependiculare pe direcţiile lor. Să se calculeze viteza punctului de intersecţie al celor două rigle.

1.6. Două corpuri se deplasează de-a lungul aceleiaşi drepte pornind din aceeaşi poziţie iniţială. Dependenţa vitezelor celor două corpuri de timp este reprezentată în figura 1.6. Să se determine durata T de la începutul mişcării pînă la întîlnirea corpurilor, dacă se cunosc momentele de timp t_1 şi t_2.

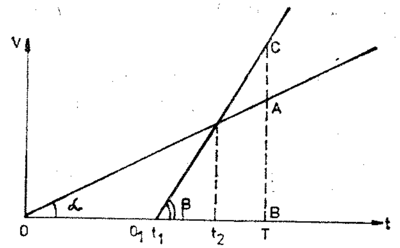

Fig. 1.6.

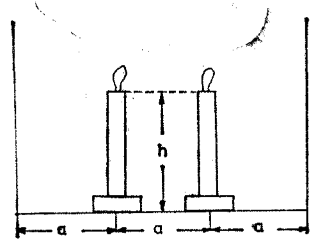

Fig. 1.7.

1.7. Două lumînări avînd aceeaşi înălţime iniţială h se află la distanţa a una de alta, iar distanţa dintre fiecare lumînare şi peretele apropiat este tot a (fig. 1.7). Ştiind că lumînările se consumă în timpul t_1 şi respectiv t_2, să se determine vitezele cu care se deplasează umbrele lumînărilor pe pereţi.

• **1.8.** Un autobuz se deplasează pe o şosea cu viteza $v_1 = 16$ m/s. Un om se află la distanţa $a = 60$ m de şosea şi $b = 400$ m de autobuz. a) Considerînd că omul merge cu viteza de 4 m/s, să se determine în ce direcţie trebuie să meargă acesta pentru a întîlni autobuzul într-un punct de pe şosea, sau pentru a ajunge înaintea autobuzului pe şosea; b) Să se determine viteza minimă şi direcţia de mers corespunzătoare a omului pentru a întîlni autobuzul.

1.9. Un sportiv se află pe malul unui lac în punctul A şi trebuie să ajungă în punctul B de pe lac. Cunoscînd distanţele AC = a = 20 m şi BC = b = 40 m (fig. 1.9) şi vitezele sportivului în apă $v_1 = 1$ m/s şi pe uscat $v_2 = 10$ m/s să se calculeze: a) cum va ajunge mai repede în punctul B, pe traiectoria ACB sau mergînd direct pe AB?; b) ce drum va alege pentru a ajunge în B în timpul minim posibil.

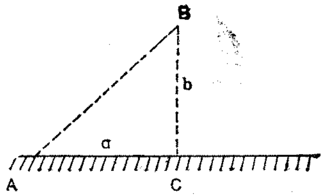

Fig. 1.9.

• **1.10.** Un autoturism se deplasează cu viteza $v_1 = 22$ m/s în urma unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Cînd distanţa dintre autoturism şi autocamion devine $d_1 = 20$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depăşirea autocamionului, dar observă în acelaşi timp un autobuz venind din sens opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanţă minimă d_3 trebuie asigurată între autobuz şi autoturism pentru a efectua în siguranţă manevra de depăşire, astfel ca după depăşire autoturismul să se afle la distanţa $d_2 = 50$ m în faţa autocamionului?

• **1.11.** Un avion zboară între punctele A şi B dus şi întors cu viteza $v_1 = 300$ km/h. Care este timpul necesar întregului zbor dacă

vîntul suflă cu o viteză $v_2 = 60$ km/h de-a lungul direcției de zbor? Distanța AB = D = 900 km.

• **1.12.** O barcă parcurge distanța dintre două porturi în sensul curgerii rîului în timpul $t_1 = 1$ h și împotriva curentului în timpul $t_2 = 2$ h. În cît timp parcurge această distanță un colac de salvare?

• **1.13.** Să se calculeze durata zborului unui avion între două puncte A și B, aflate la distanța $a = 500$ km, dacă viteza avionului față de sol este $v_1 = 100$ m/s, iar viteza vîntului $v_2 = 30$ m/s face un unghi $\alpha = 30°$ cu direcția de mișcare a avionului (fig. 1.13).

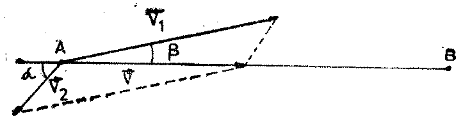

Fig. 1.13.

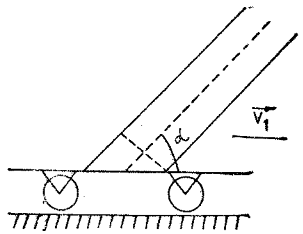

Fig. 1.14.

1.14. Un tub care se poate roti într-un plan vertical este așezat pe un cărucior (fig. 1.14). Căruciorul se mișcă uniform cu viteza $v_1 = 2$ m/s pe o suprafață orizontală. Cu ce unghi α față de orizontală trebuie înclinat tubul astfel ca picăturile de ploaie ce cad vertical cu viteza $v_2 = 6$ m/s să se deplaseze paralel cu pereții tubului fără a-l atinge? Se consideră că picăturile au viteza constantă datorită frecării cu aerul.

• **1.15.** O barcă se deplasează între punctele A și B situate pe malurile opuse ale unui rîu (fig. 1.15) după direcția AB. Distanța dintre punctele A și B este $d = 1200$ m. Viteza curentului de apă $v = 2,8$ m/s este constantă pe toată lățimea rîului. Segmentul AB face unghiul $\alpha = 60°$ cu direcția curentului. Să se determine viteza u a bărcii și unghiul β făcut de aceasta cu AB dacă timpul de dus-întors al bărcii este $t = 5$ min. Unghiul β rămîne același în timpul trecerii de la A la B și de la B la A.

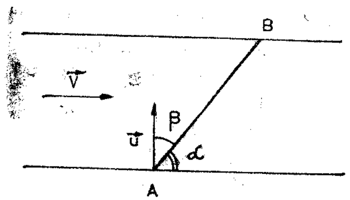

Fig. 1.15.

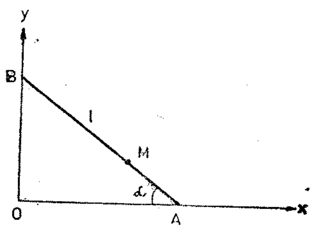

Fig. 1.16.

1.16. O bară AB de lungime l se deplasează cu extremitatea A pe axa Ox și cu extremitatea B pe axa Oy (fig. 1.16). Să se determine traiectoria unui punct oarecare M al barei. Ce traiectorie descrie mijlocul barei?

1.17. Corpul D este ridicat cu două cabluri, EAC și NBC, trecute peste scripeții A și B (fig. 1.17). La momentul inițial $OC = c = 10\sqrt{3}$ m și AC = BC. Distanța dintre scripeți este $AB = 2a = 20$ m. Cablul CBN este înfășurat pe troliul N cu viteza $v = 1$ m/s. Să se determine traiectoria punctului C de care este agățat corpul D și viteza acestui punct.

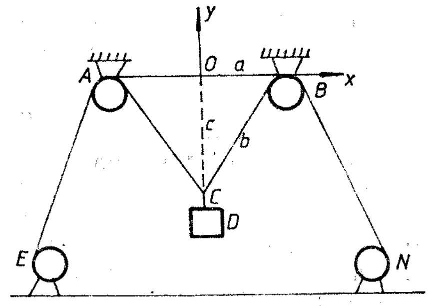

Fig. 1.17.

1.18. Un corp se deplasează de-a lungul axei Ox după legea $x = A + Bt + Ct^3$, unde $A = 4$ m; $B = 2$ m/s; $C = -0,5$ m/s^3. Să se calculeze la momentul $t_1 = 2$ s: a) coordonata x_1 a corpului; b) viteza v_1 și accelerația a_1.

1.19. Un corp se mișcă conform legii $x = 16t - 6t^2$, unde x se măsoară în metri, iar t în secunde. Să se calculeze: a) poziția corpului la momentul $t_1 = 1$ s; b) momentele de timp la care corpul trece prin origine; c) viteza medie a corpului în intervalul de timp $0 \leqslant t \leqslant 2$ s; d) expresia vitezei medii în intervalul de timp $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta t$; e) momentele de timp în care accelerația corpului este nulă.

1.20. Două particule respectă legile de mișcare: $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ și $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, unde $A_1 = 20$ m; $A_2 = 2$ m; $B_1 = B_2 = 2$ m/s; $C_1 = -4$ m/s^2; $C_2 = 0,5$ m/s^2. Să se calculeze: a) momentul de timp în care vitezele celor două particule sînt egale; b) vitezele și accelerațiile particulelor în momentul întîlnirii.

1.21. O particulă se deplasează după legea de mișcare $x = A + Bt + Ct^2$, unde $A = 5$ m; $B = 4$ m/s; $C = -1$ m/s^2. a) Să se reprezinte grafic coordonata x în funcție de timpul t; b) Să se calculeze viteza medie în intervalul de timp cuprins între $t_1 = 1$s și $t_2 = 6$ s.

1.22. În figura 1.22 este reprezentată dependența vitezei de timp pentru mișcarea unui corp. Să se determine: a) natura acestei mișcări; b) viteza inițială și accelerația și să se scrie ecuația de mișcare a corpului.

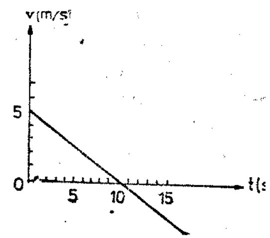

Fig. 1.22.

1.23. Un corp se deplasează uniform accelerat străbătînd distanțele $s_1 = 24$ m și $s_2 = 64$ m în decursul a două intervale de

timp consecutive, fiecare avînd durata $t = 4$ s. Să se determine viteza inițială și accelerația corpului.

* **1.24.** Două localități A și B se află la distanța $l = 60$ km una față de cealaltă. Din localitatea A pornesc simultan spre B două vehicule. Primul vehicul se mișcă uniform cu viteza $v = 30$ km/h, iar al doilea se mișcă uniform accelerat cu viteza inițială nulă pînă la jumătatea distanței dintre cele două localități, iar apoi se mișcă uniform încetinit cu aceeași accelerație ca și pe prima jumătate a drumului. Vehiculele ajung simultan în B. Să se calculeze : a) timpul total de mișcare și accelerația celui de al doilea vehicul ; b) timpul și distanța față de localitatea A a primului vehicul atunci cînd distanța dintre cele două vehicule este maximă ; c) valoarea distanței maxime dintre vehicule.

* **1.25.** Un mobil pornește de-a lungul axei Ox la momentul $t = 0$ fără viteză inițială și se mișcă timp de 6 s. Accelerația sa depinde de timp conform graficului din figura 1.25. a) Să se reprezinte grafic viteza mobilului în funcție de timp ; b) Să se calculeze valoarea coordonatei finale a mobilului ; c) Să se calculeze distanța parcursă de mobil.

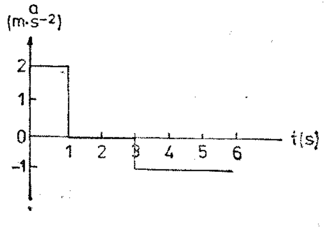

Fig. 1.25.

1.26. Două autovehicule pornesc din punctul A simultan și ajung în B după $t_0 = 2$ h. Primul vehicul parcurge jumătate din distanță cu viteza $v_1 = 30$ km/h și cealaltă jumătate cu viteza $v_2 = 45$ km/h. Al doilea vehicul parcurge întreaga distanță cu o accelerație constantă. Să se calculeze : a) vitezele medii ale celor două vehicule și distanța AB ; b) accelerația și viteza în B a celui de al doilea vehicul ; c) momentele de timp pentru care vitezele celor două vehicule sînt identice ; d) de cîte ori se întîlnesc vehiculele pe distanța AB.

1.27. Pe o pistă de încercare orizontală, un motor cu rachetă pornit din repaus s-a deplasat cu accelerație constantă pînă și-a consumat combustibilul, după care a continuat să se miște cu o viteză constantă. Epuizarea combustibilului a avut loc în momentul în care racheta se afla la jumătatea pistei de încercare. După aceasta a fost lansat pe pistă un motor de avion cu reacție, pornind din repaus și deplasîndu-se cu accelerație constantă pe întreaga distanță. S-a observat că atît motorul de rachetă cît și cel de avion au parcurs distanța de verificare în același timp. Care este raportul dintre accelerația motorului de avion și cea a motorului de rachetă ?

1.28. Un mobil se mișcă uniform încetinit. După ce parcurge distanța $d_1 = 10$ m față de punctul inițial 0 corpul are viteza $v_1 = 10$ m/s, iar după parcurgerea distanței $d_2 = 20$ m față de 0 are

viteza $v_2 = 8$ m/s. Să se calculeze : a) viteza inițială și accelerația mișcării ; b) timpul necesar ca mobilul să străbată distanța $(d_2 - d_1)$; c) timpul și spațiul pînă la oprire, calculate față de 0 ; d) spațiul străbătut în ultimele $\tau = 2$ s.

* **1.29.** Două puncte A și B se află la distanța $D = 500$ m. Din A se deplasează uniform accelerat spre B un corp cu viteza inițială $v_{01} = 10$ m/s și accelerația $a_1 = 1$ m/s², iar după $\Delta t = 4$ s pleacă din B spre A un al doilea corp într-o mișcare uniform încetinită avînd viteza inițială $v_{02} = 20$ m/s și accelerația $a_2 = 0{,}5$ m/s². Să se calculeze : a) distanța față de A a punctului de întîlnire și timpul t_1 de la plecarea primului corp pînă la întîlnire ; b) vitezele v_1 și v_2 în momentul întîlnirii ; c) vitezele medii și viteza relativă în momentul întîlnirii ; d) distanța dintre corpuri în momentul în care s-a oprit al doilea corp.

1.2. Mișcarea corpurilor sub acțiunea unor tipuri de forțe

1.30. Un corp este aruncat vertical în jos cu viteza inițială $v_0 = 19{,}6$ m/s și în ultima secundă de cădere parcurge $n = 1/4$ din spațiul total. Să se calculeze timpul de cădere și viteza finală. Care este înălțimea de la care cade corpul ?

* **1.31.** Un corp în cădere liberă a străbătut în ultimele $\tau = 4$ s distanța $h = 1000$ m. Neglijînd frecarea cu aerul și considerînd $g = 10$ m/s² să se calculeze : a) înălțimea H de la care cade corpul și viteza v cu care atinge solul ; b) spațiul parcurs în a șasea secundă de coborîre ; c) timpul în care străbate ultimii $h' = 200$ m.

1.32. O rachetă lansată vertical urcă cu o accelerație constantă $2g$ timp de 50 s cît timp funcționează motorul rachetei. Neglijînd rezistența aerului și variația lui g cu altitudinea : a) să se reprezinte grafic variația vitezei în funcție de timp, pe toată durata zborului rachetei ; b) să se calculeze înălțimea maximă atinsă ; c) să se calculeze timpul total scurs de la lansarea rachetei pînă la întoarcerea pe Pămînt.

1.33. Un observator aflat la înălțimea $h = 80$ m față de sol vede trecînd prin fața sa un corp aruncat vertical, iar după $\Delta t = 10$ s îl vede trecînd în jos. Se cere : a) viteza inițială cu care a fost lansat corpul de la Pămînt ; b) înălțimea maximă și timpul de urcare pînă la înălțimea maximă ; c) timpul în care ajunge corpul de la sol pînă la observator ; d) spațiul străbătut în a patra secundă la urcare.

• **1.34.** Un corp cade liber din punctul A situat la înălțimea $H+h$ (fig. 1.34), în timp ce altul este aruncat în sus cu o viteză inițială v_0 din punctul C, la același moment de timp cu cel din A. a) Ce viteză inițială v_0 trebuie să aibă al doilea corp astfel încît ele să se întîlnească în punctul B? b) Care este înălțimea maximă atinsă de cel de al doilea corp? c) La cît timp după ce corpul din A începe să cadă și cu ce viteză inițială trebuie aruncat în sus corpul din C pentru a satisface simultan condițiile: (1) corpurile să se întîlnească în punctul B la înălțimea h; (2) înălțimea h este înălțimea maximă pe care o atinge corpul aruncat din C?

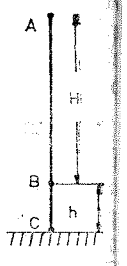

Fig. 1.34.

1.35. Un corp cade liber de la înălțimea $h = 240$ m. După $\Delta t = 2$ s de la pornirea primului corp se aruncă de jos în sus pe verticală un alt corp cu viteza inițială $v_{02} = 60$ m/s. Să se calculeze: a) timpul t_2 scurs de la lansarea corpului al doilea și înălțimea h_2 la care se întîlnesc cele două corpuri; b) viteza relativă cu care trec cele două corpuri unul pe lîngă celălalt; c) spațiul parcurs de primul corp în ultimele $\tau = 3$ s și viteza cu care acesta atinge solul; d) intervalul de timp dintre momentele în care cele două corpuri ating solul. Se va lua $g = 10$ m/s².

• **1.36.** Două corpuri se aruncă vertical de jos în sus cu vitezele inițiale v_{01} și v_{02}, la un interval de timp Δt unul după altul. Să se calculeze: a) timpul t socotit din momentul aruncării primului corp pînă la întîlnire; b) înălțimea față de sol la care se întîlnesc corpurile; c) vitezele v_1 și v_2 în momentul întîlnirii; d) intervalul de timp Δt pentru ca cele două corpuri să se întîlnească în aer.

1.37. Două corpuri sînt aruncate în același moment cu aceeași viteză inițială v_0 din punctul de coordonate $x = y = 0$ sub unghiuri diferite față de orizontală α_1 și α_2 (fig. 1.37). Se cere să se determine: a) viteza cu care corpurile se deplasează unul față de celălalt; b) distanța dintre corpuri după timpul τ.

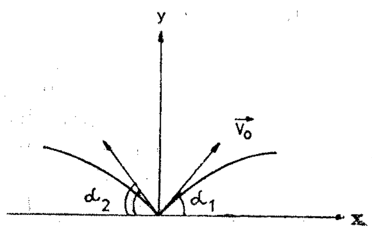

Fig. 1.37.

1.38. La ce înălțime vectorul vitezei unui corp aruncat sub un unghi $\alpha = 45°$ față de orizontală cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s va face cu orizontala unghiul $\beta = 30°$. Se neglijează rezistența aerului.

1.39. Dintr-un punct aflat pe un plan orizontal sînt aruncate simultan două corpuri cu aceeași viteză inițială $v_0 = 10$ m/s sub unghiuri diferite $\alpha_1 = 30°$ și $\alpha_2 = 60°$. Să se calculeze distanța dintre corpuri după $t = 2$ s de la aruncare.

• **1.40.** De la înălțimea h a unui turn se aruncă orizontal un corp cu viteza inițială v_0. Să se calculeze: a) timpul după care corpul atinge solul; b) viteza corpului după timpul t mai mic ca timpul de cădere; c) distanța de la baza turnului la locul de cădere; d) viteza cu care atinge solul; e) unghiul α față de orizontală sub care corpul atinge solul.

• **1.41.** Dintr-un turn de la înălțimea $h = 100$ m se aruncă un proiectil cu viteza inițială $v_0 = 60$ m/s sub un unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală. Să se calculeze: a) după cît timp de la aruncarea proiectilului acesta va atinge solul; b) distanța față de baza turnului la care ajunge proiectilul; c) viteza cu care atinge solul; d) unghiul β sub care atinge solul.

• **1.42.** Un corp este aruncat cu viteza inițială $v_0 = 100$ m/s sub unghiul $\alpha = 30°$ față de orizontală. Să se calculeze înălțimea H de la care trebuie aruncat orizontal un alt corp, cu aceeași viteză inițială, pentru ca acestea să atingă solul în același punct A (fig. 1.42). Dacă aruncările sînt simultane care este diferența Δt dintre duratele mișcărilor celor două corpuri?

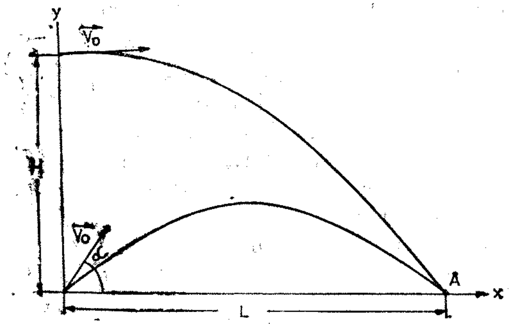

Fig. 1.42.

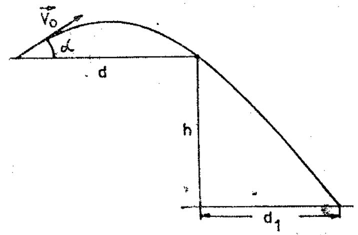

Fig. 1.43.

• **1.43.** Un tun se află la distanța $d = 8{,}1$ km (pe orizontală) de marginea unei faleze care coboară cu $h = 100$ m sub nivelul amplasamentului tunului. Cît de aproape de piciorul falezei d_1 pot cădea proiectilele dacă ele sînt lansate cu o viteză inițială $v_0 = 300$ m/s (fig. 1.43)?

1.44. Un proiectil este lansat cu viteza v_0, ce face un unghi cu orizontala, dintr-un tun aflat pe o suprafață înclinată cu unghi $\beta = \pi/4$ față de orizontală ($\beta < \alpha$). a) Să se calculeze valoarea unghiului α astfel încît proiectilul să străbată distanța maximă pe suprafața înclinată; b) Care este valoarea unghiului făcut de viteza proiectilului cu suprafața înclinată în punctul de contact?

• **1.45.** Un copil aruncă o minge sub un unghi de 70° față de orizontală. Mingea intră printr-o fereastră deschisă aflată la 10 m deasupra umărului său, viteza în momentul respectiv fiind orizontală. a) Ce viteză avea mingea cînd a părăsit mîna băiatului? b) Care es

raza de curbură a curbei descrise de minge, în momentul în care aceasta intră pe fereastră? Dar la un moment de timp t oarecare?

1.46. Se aruncă pe verticală de jos în sus un corp cu viteza inițială v_0. Forța de frecare cu aerul este constantă și reprezintă a n-a parte din greutatea corpului. Să se calculeze: a) accelerația la urcare și coborîre; b) înălțimea maximă la care urcă corpul; c) timpul total de urcare și coborîre; d) viteza finală cu care corpul atinge solul.

• **1.47.** Pe o suprafață orizontală se află trei corpuri de mase m_1, m_2 și m_3 legate unul de altul (fig. 1.47). Cunoscînd valorile coeficienților de frecare μ_1, μ_2 și μ_3 să se calculeze: a) forța de tracțiune necesară pentru a asigura mișcarea uniformă a corpurilor; b) accelerația a' cu care se deplasează sistemul rămas dacă corpul de masă m_3 se desprinde, iar forța de tracțiune rămîne constantă; c) accelerația a'' cu care se deplasează corpul de masă m_1 după desprinderea și a corpului de masă m_2, dacă forța de tracțiune rămîne nemodificată.

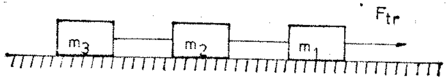

Fig. 1.47.

• **1.48.** Asupra unui corp de masă $m = 10$ kg acționează o forță $F = 100$ N sub unghiul $\beta = 30°$ față de direcția de mișcare pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$. Știind că la intrarea pe planul înclinat corpul are o viteză inițială $v_0 = 0{,}2$ m/s, iar coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}2$, să se calculeze: a) accelerația cu care urcă corpul pe plan; b) viteza și spațiul străbătut de corp după $t = 4$ s; c) timpul și spațiul parcurs pînă la oprire pe planul înclinat, dacă după cele $t = 4$ s forța F încetează să mai acționeze.

• **1.49.** Asupra unui corp de masă m, ce se află pe un plan orizontal, acționează o forță F sub unghiul α. Dacă la momentul $t = 0$, corpul are viteza v_0, iar coeficientul de frecare dintre corp și plan este μ, să se deducă: a) ecuațiile de mișcare ale corpului; b) mărimea forței F ce asigură o mișcare rectilinie și uniformă a corpului; c) considerînd α variabil, care este unghiul α_0 ce asigură o mișcare uniformă a corpului astfel încît forța să fie minimă și care este valoarea minimă a forței.

• **1.50.** În cabina unui ascensor de masă M_2 atîrnă un corp de masă M_1 (fig. 1.50). Ascensorul urcă în mișcare uniform accelerată, sub acțiunea unei forțe constante $F(F > M_1g + M_2g)$. La momentul inițial masa M_1 se află la distanța S deasupra podelei ascensorului. a) Să se calculeze accelerația ascensorului; b) Care este tensiunea din firul de care este suspendată masa M_1? c) Dacă firul se rupe brusc, care este accelerația imediat după aceasta? Care este accelerația masei M_1? d) După cît timp ajunge masa M_1 pe podeaua ascensorului?

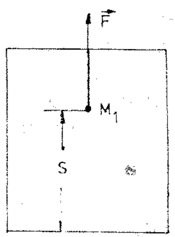

Fig. 1.50.

• **1.51.** De tavanul unui ascensor este legat un dinamometru de care este legat un scripete. Peste scripete este trecut un fir inextensibil la capetele căruia se află două corpuri cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg. Ce va indica dinamometrul în timpul deplasării corpurilor dacă: a) ascensorul urcă cu accelerația $a = 3$ m/s²; b) ascensorul se află în repaus. Masele scripetelui și firului se neglijează.

• **1.52.** Două plane înclinate identice, avînd unghiul de la bază $\alpha = 45°$, cu fețe netede și masele $m_1 = m_2 = 8$ kg (fig. 1.52) sînt utilizate pentru a deplasa un corp cu fețe netede $m = 384$ kg. Ambele plane înclinate se află pe o suprafață orizontală netedă. Unul din plane se reazemă pe un perete vertical, iar celuilalt i se aplică o forță orizontală F = 5800 N. Să se calculeze: a) mărimea și direcția accelerației planului înclinat mobil m_1; b) mărimea și direcția accelerației masei m; c) forța cu care acționează planul m_2 asupra masei m.

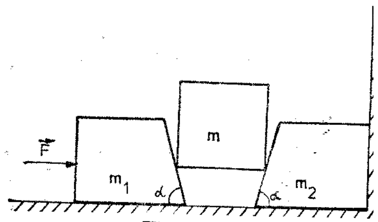

Fig. 1.52.

• **1.53.** Pe o suprafață orizontală se află două cuburi avînd fiecare masa M. Între cuburi se introduce o pană cu masa m și unghiul la vîrf 2α (fig. 1.53). Coeficientul de frecare dintre cuburi și suprafața orizontală este μ. Neglijînd frecarea dintre cuburi și pană să se calculeze accelerația cuburilor în raport cu suprafața orizontală.

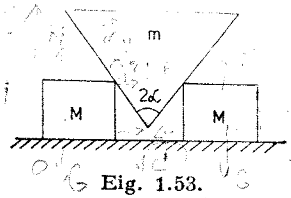

Fig. 1.53.

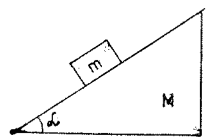

Fig. 1.54.

• **1.54.** Pe suprafața laterală a unei pene cu unghiul $\alpha = 45°$ (fig. 1.54) și masa $M = 2$ kg alunecă un corp cu masa $m = 1$ kg. Pana se află pe suprafața orizontală a unei mese. Frecarea dintre pană și masă se neglijează. a) Să se calculeze accelerația cu care se mișcă pana pe masă cînd corpul alunecă pe pană; b) Care este accelereația corpului m față de pană?

1.55. O masă cu greutatea $G_1 = 150$ N se poate deplasa fără frecare pe o suprafață plană. Un corp cu greutatea $G_2 = 100$ N se află pe masă și este legat de un fir trecut peste doi scripeți atașați

mesei (fig. 1.55). Coeficientul de frecare dintre corp și masă este $\mu = 0,6$. Să se determine accelerația cu care se mișcă masa dacă se aplică capătului liber al firului o forță constantă $F = 80$ N cînd : a) forța este orientată orizontal; b) forța este orientată vertical.

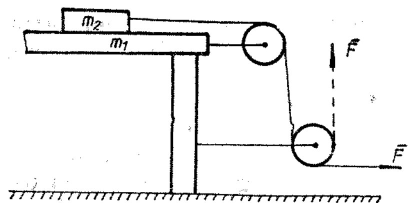

Fig. 1.55.

• **1.56.** O platformă cu masa $M = 20$ kg se poate deplasa fără frecare pe o suprafață orizontală. Pe platformă se află un corp cu masa $m = 2$ kg (fig. 1.56). Coeficientul de frecare dintre corp și platformă este $\mu = 0,25$. Știind că asupra corpului se acționează cu o forță $F_1 = 2$ N și apoi cu o forță $F_2 = 20$ N, să se determine : a) forța de frecare dintre corp și platformă și accelerația sistemului cînd $F_1 = 2$ N; b) accelerația corpului și platformei în cel de-al doilea caz; c) considerînd că platforma are lungimea $l = 63$ m să se determine timpul după care corpul părăsește platforma în cel de al doilea caz.

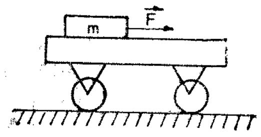

Fig. 1.56.

• **1.57.** Un corp cu masa m_1 se află pe o suprafață plană pe care se poate deplasa fără frecare. Un alt corp cu masa m_2 este așezat peste corpul de masă m_1, pe suprafața căruia se poate deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ. Corpurile m_1 și m_2 sînt legate printr-un fir trecut peste un sistem de scripeți ca în figura 1.57. De scripetele mobil este suspendat un corp m_3. Să se stabilească condiția ca cele trei corpuri să se miște cu aceeași accelerație.

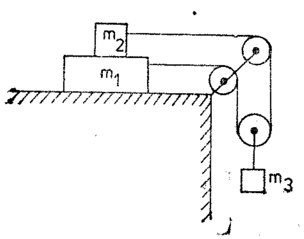

Fig. 1.57.

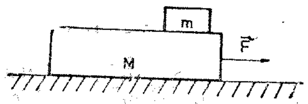

Fig. 1.58

• **1.58.** Un bloc cu masa M se află pe o suprafață orizontală plană pe care se poate deplasa fără frecare. Un corp cu masa m se află pe bloc (fig. 1.58). Coeficientul de frecare dintre corp și bloc este μ. Se cere : a) forța F care aplicată blocului în direcție orizontală va determina masa m să alunece pe bloc; b) timpul în care corpul va cădea de pe bloc dacă lungimea acestuia este l.

• **1.59.** Se consideră un sistem mecanic format din trei corpu de mase m_1, m_2 și m_3 (fig. 1.59). Considerînd frecările neglijabile masa scripetelui A neglijabilă să se calculeze accelerațiile corpurilo

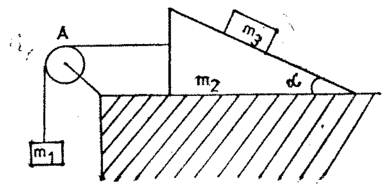

Fig. 1.59.

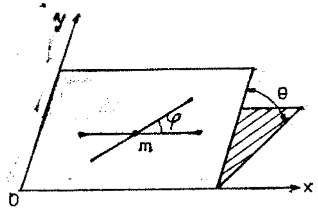

Fig. 1.60.

1.60. Se aruncă un corp de-a lungul unui plan înclinat ce fac un unghi θ cu orizontala. Dacă coeficientul de frecare de alunecar este $\mu < \text{tg}\,\theta$, să se calculeze : a) accelerația la urcare pe planu înclinat; b) accelerația la coborîre; c) accelerațiile la urcare și l coborîre cînd aruncarea, respectiv coborîrea se face sub un unghi φ măsurat în planul suprafeței înclinate cu o dreaptă orizontală î acest plan (fig. 1.60).

• **1.61.** Un corp de masă $m = 1$ kg alunecă pe un plan inclina care face un unghi $\theta = 30°$ cu orizontala. Coeficientul de frecar dintre corp și planul înclinat este $\mu = 0,2$. Dacă corpul este arunca pe plan în sus cu viteza inițială $v_0 = 3$ m/s să se calculeze : a) c distanță parcurge corpul pe plan; b) cît timp este necesar pentru a urc și a coborî apoi în punctul de plecare; c) ce energie mecanică s pierde, transformîndu-se în căldură în acest proces?

• **1.62.** Un corp este aruncat de-a lungul unui plan înclinat c unghiul $\alpha = 45°$, după care coboară. Cunoscînd coeficientul de fre care dintre corp și plan $\mu = 0,2$, să se calculeze : a) raportul dintr timpul de urcare și timpul de coborîre pe planul înclinat; b) raportu dintre viteza inițială și finală; c) randamentul planului înclinat

• **1.63.** Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ se află un corp Coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind $\mu = 0,2$, să se cal culeze cu ce accelerație trebuie deplasat planul în direcție orizon tală pentru ca : a) corpul să urce uniform; b) corpul să coboar uniform spre baza planului.

1.64. Un corp de greutate G se află pe un plan înclinat car face unghiul α cu orizontala. Care este forța minimă F, care acțio nînd orizontal va pune corpul în mișcare, dacă coeficientul stati de frecare este $\mu = 2\,\text{tg}\,\alpha$?

• **1.65.** Corpul A se află pe suprafața unui plan înclinat ce fac unghiul α cu orizontala (fig. 1.65). Ce accelerație trebuie impri

mată planului, care se poate deplasa pe o suprafață orizontală, fără frecare, pentru ca A să cadă liber?

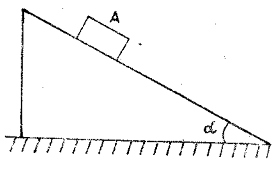

Fig. 1.65.

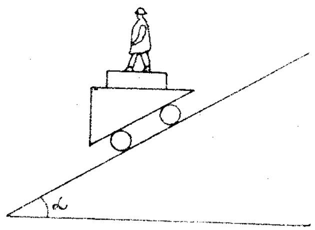

Fig. 1.66.

• **1.66.** Un tînăr efectuează următoarea experiență. El montează la un cîntar un bloc de lemn cu roți (fig. 1.66) astfel încît acesta să poată coborî fără frecare pe un plan înclinat, apoi se urcă pe cîntar și citește indicațiile acestuia în timp ce coboară pe plan. Dacă tînărul cîntărește $m = 80$ kg, iar în timpul coborîrii cîntarul indică $m = 60$ kg, care este unghiul de înclinare al planului?

• **1.67.** În dispozitivul din figura 1.67 planul înclinat are lungimea $l = 130$ cm și înălțimea $h = 50$ cm. Corpul de masă $m_2 = 60$ g se sprijină pe planul înclinat, iar masa celuilalt corp este $m_1 = 200$ g. Coeficientul static de frecare dintre cele două corpuri este $\mu_1 = 0,5$, iar coeficientul de frecare de alunecare dintre corpul inferior și planul înclinat este $\mu_2 = 0,33$. Corpului inferior i se aplică o forță F paralelă cu planul și dirijată în sus. Să se calculeze: a) accelerația corpului inferior cînd cel superior începe să alunece pe el; b) valoarea maximă a lui F pentru ca să nu apară alunecarea de la punctul a).

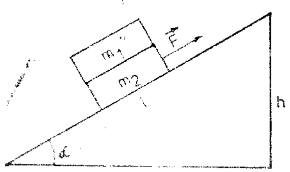

Fig. 1.67.

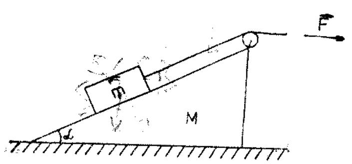

Fig. 1.68.

1.68. Un plan înclinat cu masa M și unghiul α față de orizontală se poate deplasa de-a lungul suprafeței orizontale. Pe planul înclinat se află un corp de masă m legat cu un fir trecut peste un scripete fixat în vîrful planului înclinat (fig. 1.68).

Să se calculeze accelerațiile corpului și planului înclinat față de suprafața orizontală dacă se trage orizontul de fir cu o forță F. Care sînt limitele între care poate lua valori forța F pentru ca problema să fie posibilă?

1.69. Un cablu omogen de lungime l este așezat pe suprafața unui plan înclinat ce face unghiul α cu orizontala. Unul din capetele cablului atîrnă de-a lungul suprafeței verticale a planului. Care este lungimea minimă a cablului ce trebuie să atîrne pentru ca acesta să înceapă să alunece de-a lungul planului înclinat? Coeficientul de frecare dintre cablu și planul înclinat este μ.

• **1.70.** Se aruncă de jos în sus în lungul unui plan înclinat AB de lungime $l = 10$ m, un corp cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Mișcarea pe plan are loc cu frecare ($\mu = 0,1$). În punctul B corpul părăsește planul înclinat efectuînd o mișcare prin aer pînă la atingerea solului (fig. 1.70). Să se calculeze: a) viteza corpului în punctul B; b) înălțimea maximă față de sol la care se ridică corpul; c) timpul total de mișcare (pe planul înclinat și în aer).

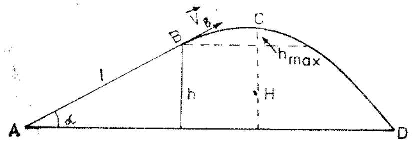

Fig. 1.70.

1.71. Corpurile de masă m_1 și m_2, aflate pe un plan orizontal sînt legate printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă. La un moment dat ele au viteza v_1, iar după străbaterea distanței d ating viteza $v_2 (v_2 > v_1)$. Cunoscînd coeficientul de frecare μ dintre corpuri și plan se cere: a) accelerația sistemului și tensiunea din fir; b) forța de tracțiune ce acționează asupra sistemului de corpuri; c) la un moment dat corpul de masă m_1 se desprinde. Care este noua valoare a accelerației dacă se consideră că forța de tracțiune a rămas constantă?

1.72. Două corpuri de mase m_1 și m_2 se află pe un plan orizontal fiind legate printr-un fir orizontal, inextensibil și de masă neglijabilă. De unul din corpuri se trage cu o forță F care formează unghiul α cu orizontala. Coeficientul de frecare dintre corpuri și plan fiind μ se cere: a) accelerația cu care se va deplasa sistemul; b) tensiunea din firul de legătură; c) valoarea maximă a tensiunii din fir.

• **1.73.** Un corp de masă $m_1 = 800$ g este așezat pe un plan înclinat pe care poate aluneca cu frecare ($\mu = 0,2$). Corpul este fixat la una din extremitățile unui fir trecut peste un scripete, la cealaltă extremitate fiind atîrnat un corp de masă $m_2 = 400$ g. Se cere: a) unghiul α_1 al planului pentru care corpurile sînt în echilibru, dacă frecarea este neglijabilă; b) unghiul α_2 al planului pentru care primul corp urcă uniform pe plan cu frecare; c) unghiul planului α_3 pentru care primul corp coboară uniform cu frecare pe plan; d) unghiul α_4 pentru care corpul urcă pe plan uniform accelerat cu accelerația $a = 1$ m/s^2, cu frecare; e) este posibil să avem o mișcare accelerată a primului corp, în coborîre pe plan cu accelerația $a' = 0,5$ m/s^2?

f) care este tensiunea în fir în cazul d) al problemei? Pentru ce unghi α tensiunea din fir este maximă și care este valoarea maximă a tensiunii?

• **1.74.** Corpurile de masă m_1 și $m_2 = 2m_1$ sînt așezate ca în figura 1.74 și se determină timpul necesar t_1 ca masa m_2 să atingă solul. Se inversează pozițiile celor două corpuri și se observă că în acest caz timpul necesar masei m_1 să atingă solul este $t_2 = 2t_1$. Să se calculeze: a) coeficientul de frecare μ; b) tensiunile din fir T_1 și T_2 în cele două cazuri.

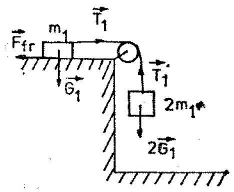

Fig. 1.74.

1.75. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 60°$ se află un corp ce este legat printr-un fir trecut peste un scripete de un taler ce are masa $m_0 = 2$ kg. Corpul este menținut în echilibru pe plan dacă se așează pe taler greutăți cuprinse între valorile $G_1 = 22$ N și $G_2 = 58$ N. Să se determine: a) greutatea corpului aflat pe planul înclinat; b) coeficientul de frecare pe plan; c) ce masă trebuie așezată pe taler pentru ridicarea corpului pe plan cu accelerația $a = 0,4$ m/s^2.

• **1.76.** Un sistem de două corpuri cu masele m_1 și m_2 se așează ca în figura 1.76, unde se cunosc unghiul α și coeficientul de frecare μ. Inițial, sistemul este în repaus și i se aplică corpului m_2 un impuls $\vec{H}$ după o direcție paralelă cu planul înclinat și orientată spre baza planului. Se cere: a) forța de frecare ce acționează; b) accelerația mișcării și tensiunea din fir; c) viteza și spațiul parcurs în timpul t.

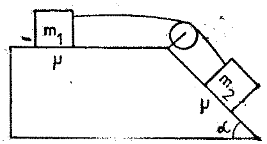

Fig. 1.76.

1.77. Peste un scripete de masă neglijabilă este trecut un fir la capetele căruia sînt atîrnate două corpuri de mase egale $m_1 = m_2 = m = 1$ kg. Pe unul din corpuri se pune o masă suplimentară $\Delta m = 50$ g. Să se calculeze a) accelerația sistemului și tensiunea din fir; b) forța de apăsare asupra axului scripetelui cînd sistemul se mișcă și cînd firul este blocat; c) forța cu care masa adițională apasă asupra corpului pe care este așezat.

1.78. La capetele A și B al unui plan înclinat ($\alpha = 30°$) se află doi scripeți de masă neglijabilă peste care este trecut un fir la extremitățile căruia sînt atîrnate corpurile de mase $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg. Pe porțiunea AB este intercalat un corp de masă $m_3 = 1$ kg care alunecă cu frecare ($\mu = 0,1$). Corpul de masă m_2 începe să coboare. Să se calculeze: a) accelerația sistemului și tensiunile din fire; b) viteza și spațiul parcurs după $t = 4$ s; c) după cele $t = 4$ s se taie firul între corpurile m_2 și m_3 și se cere timpul pînă la oprire și spațiul

pînă la oprire pentru corpurile m_1 și m_2; d) cu ce accelerație va cobo corpul de masă m_3?

• **1.79.** Un sistem este alcătuit din doi scripeți ficși și unul mob (fig. 1.79) de masă neglijabilă. Un fir trecut peste acești scripe susține la capete două corpuri de mase m_1 și m_3, iar un corp cu ma m_2 este suspendat de scripetele mobil. Să se determine accelerați fiecărui corp considerînd că frecările sînt neglijabile.

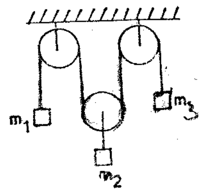

Fig 1.79.

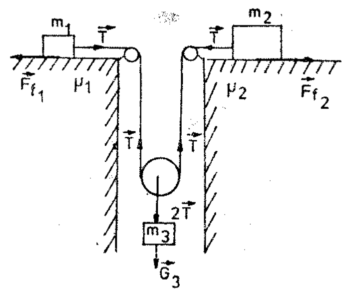

Fig. 1.80.

• **1.80.** Un sistem alcătuit din trei corpuri de mase m_1, m_2 și m legate între ele, este reprezentat în figura 1.80. Coeficientul de freca dintre corpul de masă m_1 și planul orizontal este μ_1, iar dintre corp de masă m_2 și plan este μ_2. Să se calculeze accelerațiile a_1, a_2 și ale corpurilor precum și tensiunea din fir.

• **1.81.** Ce forță orizontală F trebuie aplicată în mod consta asupra lui M, astfel încît M_1 și M_2 (fig. 1.81) să rămînă în repa față de M?

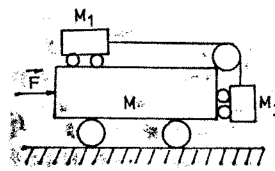

Fig. 1.81.

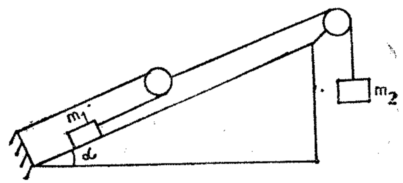

Fig. 1.82.

• **1.82.** În dispozitivul din figura 1.82 m_1 alunecă fără frecare un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$. Știind că $m_1 = 400$ g și $m_2 = 200$ g să se afle accelerația lui m_2 și tensiunile din fire.

• **1.83.** Se consideră dispozitivul din figura 1.83. Masa $m = 150$ este lăsată liberă de la distanța $d = 1,22$ m deasupra bazei

$M = 1650$ g. După cît timp va ajunge masa m la baza lui M? Frecările sînt neglijabile.

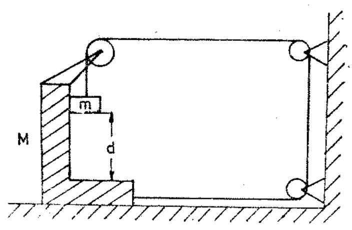

Fig. 1.83.

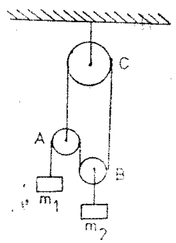

Fig. 1.84.

1.84. În sistemul de scripeți A, B, C, reprezentat în figura 1.84 se cunosc masele m_1 și m_2. Neglijînd masele scripeților și frecarea să se determine: a) accelerațiile celor două corpuri de mase m_1 și m_2; b) sensurile în care se vor roti scripeții.

• **1.85.** Pentru sistemul reprezentat în figura 1.85 să se calculeze: a) forța f cu care trage firul un om de masă $m = 60$ kg pentru a sta în echilibru pe platforma de masă $M = 30$ kg; b) forța F cu care apasă omul pe platformă; c) masa maximă M_{max} a platformei pe care o poate menține omul.

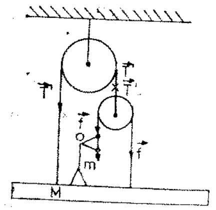

Fig. 1.85.

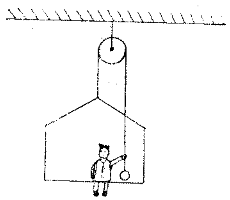

Fig. 1.86.

• **1.86.** Un vopsitor cu masa $M_1 = 70$ kg lucrează la fațada unui bloc stînd pe un scaun suspendat de un scripete (figura 1.86). Dorind să se urce în grabă, el trage cablul în jos cu asemenea forță încît apasă asupra scaunului cu forța $P = 400$ N. Scaunul are masa $M_2 = 40$ kg. a) Care este accelerația vopsitorului și a scaunului? b) Ce forță totală suportă scripetele?

• **1.87.** O bicicletă merge cu viteza $v = 36$ km/h. Razele roților mici și mari sînt respectiv $R_1 = 40$ cm și $R_2 = 50$ cm. Să se calculeze: a) vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 ale fiecărei roți; b) turațiile n_1 și n_2 (în rotații pe minut); c) numărul total de rotații N_1 și N_2 efectuate de fiecare roată pe distanța $l = 500$ m.

1.88. Punctul A situat pe circumferința unei roți în mișcare are viteza liniară $v_1 = 50$ cm/s iar punctul B, situat pe aceeași roată cu $d = 20$ cm mai aproape de axa de rotație, are viteza liniară $v_2 = 10$ cm/s. Să se calculeze: a) viteza unghiulară ω și raza roții; b) frecvența ν și turația n; c) numărul total de rotații efectuat în timpul $t = 30$ s.

• **1.89.** Un tractor cu șenile se deplasează cu viteza $v_0 = 18$ km/h. Pentru a întoarce la stînga, se micșorează viteza șenilei din partea stîngă la $v_1 = 14$ km/h (fig. 1.89). Distanța dintre șenile fiind $d = 1,5$ m, care va fi raza arcului descris de centrul de masă al tractorului.

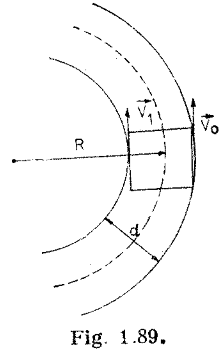

Fig. 1.89.

1.90. O roată cu raza a se rostogolește fără alunecare pe o șină rectilinie. Viteza centrului de masă este constantă și egală cu v_0. Să se scrie expresia vectorului de poziție, a vitezei și accelerației unui punct M de pe suprafața roții aflat la distanța $l (l < a)$ de centrul roții.

1.91. O roată cu raza R se deplasează cu viteza constantă v pe un drum orizontal. Să se calculeze la ce înălțime maximă (H_{max}) poate fi aruncat noroiul de pe roată și care este unghiul α făcut de spiță cu verticala pentru care se desprinde noroiul de pe roată (fig. 1.91.).

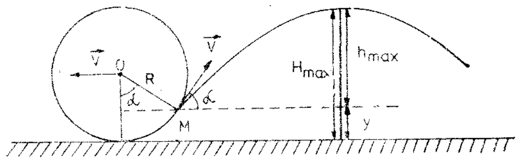

Fig. 1.91.

• **1.92.** Un disc cu raza $r = 10$ cm se rotește cu o accelerație unghiulară constantă $\varepsilon = 3,14$ rad/s². Să se determine pentru punctele de la periferia discului, după o secundă de la începerea mișcării: a) viteza unghiulară; b) viteza liniară; c) accelerația tangențială; d) accelerația normală; e) accelerația totală; f) unghiul format de direcția accelerației totale cu raza discului.

1.93. Un disc de rază $R = 0,4$ m se rotește uniform accelerat. La momentul inițial $t = 0$, un punct periferic al său are viteza liniară $v_0 = 0,8$ m/s, iar la momentul $t_2 = 2$s are viteza liniară $v_1 = 1,2$ m/s. Să se deducă legile de mișcare ale discului (ecuația vitezei unghiulare ω și a unghiului θ în funcție de timpul t).

1.94. Un disc, care se poate roti în jurul unei axe fixe, are o mișcare uniform accelerată pînă la momentul $t_1 = 6$s, cînd atinge turația de regim $n_1 = 900$ rot/min, merge apoi în regim timpul $t_2 = 10$ s, apoi este frînat avînd o mișcare uniform încetinită și se oprește executînd în timpul frînării $N_3 = 225$ rotații. Să se deducă; a) legile de mișcare ale discului; b) timpul de frînare t_3: c) numărul total N de rotații efectuate în tot timpul mișcării.

1.95. Rotorul unui motor este scos din priză. După ce a efectuat N_1 rotații are viteza unghiulară ω_1, iar după ce a efectuat N_2 rotații socotite din momentul inițial are viteza unghiulară ω_2. Se cere: a) viteza unghiulară inițială ω_0 și accelerația unghiulară a mișcării; b) timpul și numărul de rotații efectuate pînă la oprire; c) numărul de rotații efectuate în ultima secundă de mișcare; d) timpul scurs între momentele în care se măsoară vitezele unghiulare ω_1 și ω_2.

• **1.96.** Rotorul unei mașini electrice are turația inițială $n_0 = 1500$ rot/min. După întreruperea curentului rotorul mai face $N_1 = 500$ rotații complete. Considerînd mișcarea uniform încetinită se cere: a) timpul în care se oprește rotorul; b) accelerația unghiulară a rotorului; c) viteza unghiulară după ce rotorul a făcut $N_2 = 100$ rotații complete.

1.97. O bilă cu masa $m = 0,1$ kg este legată la capătul unei sfori cu lungimea $l = 1$m și masa neglijabilă. Celălalt capăt este fixat de un cilindru cu raza $r = 1$ cm. Dîndu-i bilei o viteză $v = 3,14$ m/s sfoara se răsucește pe cilindru cu aceeași viteză periferică. Se cere să se determine: a) cum variază turația n în funcție de lungimea sforii înfășurată pe cilindru; b) viteza unghiulară ω după $N = 10$ răsuciri a sforii pe cilindru; c) în cît timp se efectuează a 12-a răsucire.

1.98. Un fir de cauciuc cu secțiunea $S = 0,5$ cm^2 și lungimea $l = 18$ cm se înfășoară peste trei cuie A, B, C așezate în formă de triunghi echilateral cu latura $l_1 = 6$ cm (fig. 1.98). Acționînd cu o forță F în mijlocul M al laturii BC în sens opus vîrfului A se cere: a) mărimea forței F pentru a obține un romb ABOC; b) mărimea forței F pentru a obține un unghi drept BOC; c) energia potențială acumulată de fir în cele două cazuri dacă modulul de elasticitate a firului este $E = 9,8 \cdot 10^5$N/m^2.

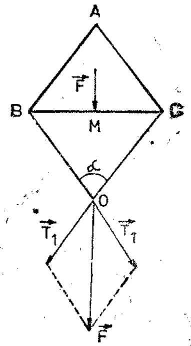

Fig. 1.98.

• **1.99.** De un resort cu constanta elastică $k = 200$ N/m se leagă un scripete de masă neglijabilă. Pe scripete este trecut un fir la capetele căruia sînt suspendate două corpuri de mase $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 3$kg. Să se calculeze perioada de oscilație a resortului cînd: a) corpurile de mase m_1 și m_2 sînt imobile; b) sistemul format din cele două corpuri este lăsat liber.

1.100. De un fir elastic vertical este agățat un suport cu masa $m = 20$ g pe care este așezat corpul $m_1 = 5$ g. Dacă firul este scos din poziția de echilibru el oscilează cu perioada $T = (\pi/3)$s. Care va fi alungirea maximă a firului față de poziția de echilibru dacă m_1 este înlocuită cu un corp de masă $m_2 = 25$ g?

• **1.101.** La capetele unui fir de cauciuc trecut peste un scripete fix se suspendă corpurile de mase $m_1 = 4$ kg și $m_2 = 2$kg. Să se calculeze; a) raportul alungirilor firului măsurate în cazurile cînd scripetele (de masă neglijabilă) este ținut în repaus și cînd sistemul este lăsat liber; b) același raport pentru cazul cînd scripetele se află la marginea unui plan orizontal, pe care se mișcă corpul m_2 avînd coeficientul de frecare $\mu = 0,2$, iar corpul m_1 este suspendat.

• **1.102.** Un elev învîrte în plan vertical o piatră cu masa $m = 200$ g atîrnată de un fir care poate suporta o tensiune maximă $T_{max} = 82$ N. Axa de rotație se află la o distanță $h_0 = 4$m față de sol, iar raza cercului descris de piatră este $l = 1$ m. Să se determine: a) tensiunile din fir în funcție de frecvența ν de rotație a corpului, în punctele A, B, C, D, E (fig. 1.102) dacă $\alpha = \beta = 60°$; b) cu ce turație trebuie învîrtită piatra ca firul să se rupă; c) la ce distanță D va cădea piatra pe sol.

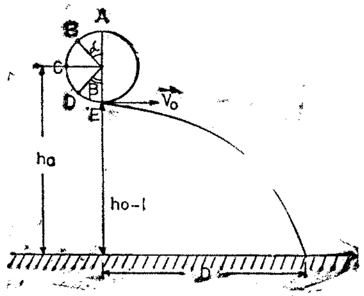

Fig. 1.102.

• **1.103.** Un automobil se deplasează pe o șosea orizontală cu frecare avînd coeficientul de frecare $\mu = 0,2$. Pe distanța $l_1 = 200$ m automobilul își mărește viteza de la $v_1 = 36$ km/h la $v_2 = 72$ km/h și își păstrează viteza v_2 constantă pe toată lungimea $l_2 = 314$ m a unei curbe care este un semicerc. Dacă masa automobilului este $m = 1000$ kg să se calculeze: a) forțele de tracțiune pe distanțele l_1 și l_2; b) viteza unghiulară și forța centrifugă la curbă; c) timpul necesar parcurgerii întregii distanțe considerate; d) viteza la care apare alunecarea laterală; e) viteza la care apare răsturnarea dacă se cunoaște distanța dintre roți $d = 1,2$ m și înălțimea centrului de greutate $h = 0,6$ m.

• **1.104.** a) Să se calculeze perioada de rotație a unui pendul conic a cărui lungime este egală cu 49 cm, iar unghiul format de fir cu verticala este egal cu $\pi/3$; b) Care este lucrul mecanic necesar pentru a pune în mișcare pendulul dacă masa $m = 1$ kg?

1.105. O bară se rotește în plan orizontal avînd axa de rotație verticală. Pe bara de masă neglijabilă se află un corp de masă m_1 legat, printr-un fir trecut peste un scripete, cu un corp de masă m_2 (coeficientul de frecare între corp și bară este μ; fig. 1.105). Firul, de lungime l, face în timpul rotației unghiul α cu verticala. Distanța de la axul de rotație la scripete este a. Știind că sistemul se află în echilibru să se calculeze : a) viteza unghiulară; b) între ce limite poate varia x pentru ca sistemul să fie în echilibru; c) tensiunea din fir și forța de apăsare asupra axului scripetelui.

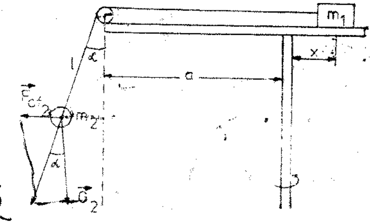

Fig. 1.105.

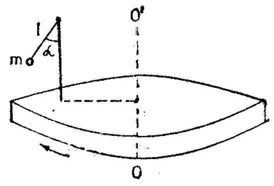

Fig. 1.106.

1.106. O bilă de masă m este legată de un capăt al unui fir, de lungime $l = 6$ cm, care este prins de o tijă verticală fixată pe o masă la distanța $r = 10$ cm față de axa de rotație (fig. 1.106). Să se determine viteza unghiulară cu care se rotește masa știind că firul face unghiul $\alpha = 45°$ cu verticala.

1.107. Să se determine viteza maximă și respectiv viteza minimă a unui autovehicul pe o șosea cu raza de curbură R, înclinată cu un unghi α față de orizontală astfel încît să nu se producă deraparea autovehiculului. Se cunoaște valoarea unghiului de frecare $\mu = \text{tg}\ \alpha$.

1.3. Energia mecanică a punctului material și a sistemului de puncte materiale

• **1.108.** Un automobil cu masa $m = 1000$ kg este propulsat de un motor a cărui putere este de 120 kW. Dacă motorul dezvoltă această putere la viteza 60 km/h, să se calculeze accelerația maximă pe care o poate avea automobilul la această viteză. Se neglijează frecarea.

• **1.109.** Un automobil cu masa $m = 1500$ kg are un motor de 85 CP. Pentru a se deplasa pe un drum orizontal cu viteza constantă de 50 km/h automobilul are nevoie de o putere de 20 CP. Presupunînd că forțele de frecare rămîn neschimbate să se calculeze panta cea mai abruptă pe care o poate urca automobilul cu această viteză (1 CP = 736 W).

1.110. Mașina Atwood prezentată în figura 1.110 folosește la determinarea accelerației gravitaționale g a locului. Scripetele P și firul C au mase și frecare neglijabile. Sistemul este echilibrat cu masele egale M. Pe ramura din stînga se așează masa suplimentară m, care este reținută de un inel după ce a parcurs distanța h. În acest moment viteza maselor este v. Să se calculeze valoarea lui g dacă $M = 188{,}2$ g, $m = 20$ g, $h = 1$m și $v = 1$m/s.

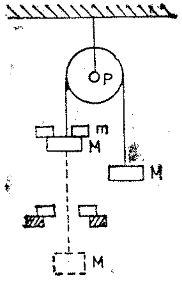

Fig. 1.110.

• **1.111.** Un corp cu masa $m = 5$ kg urcă pe un plan înclinat ce face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala sub acțiunea unei forțe $F = 40$N ce face un unghi $\beta = 30°$ cu direcția de mișcare. La ce distanță de vîrful planului se află corpul în momentul în care viteza sa este egală cu $v = 1$ m/s, dacă viteza sa inițială este nulă și coeficientul de frecare $\mu = 0{,}1$?

• **1.112.** Un camion cu masa $m = 2$t pleacînd din repaus, atinge viteza $v_1 = 36$ km/h în timpul $t_1 = 10$ s pe orizontală. După ce atinge viteza v_1 urcă o pantă cu $\alpha = 15°$ un timp $t_2 = 20$ s, după care atinge viteza $v_2 = 72$ km/h. Coeficientul de frecare pe orizontală și pe planul înclinat fiind $\mu = 0{,}1$ să se calculeze : a) forțele de tracțiune dezvoltate de motorul camionului pe șoseaua orizontală și pe planul înclinat; b) lucrul mecanic total efectuat de camion; c) puterea medie a motorului camionului pe orizontală și pe planul înclinat.

• **1.113.** Într-un obstacol de grosime $d = 0{,}5$ m pătrunde un glonte de masă $m = 20$ g avînd viteza $v_0 = 40$ m/s. Știind că înălțimea față de sol a obstacolului este $h = 10$ m și că după străpungerea obstacolului, glontele ajunge la sol cu viteza $v_2 = 35$ m/s, să se calculeze : a) forța medie ce acționează asupra proiectilului prin obstacol considerînd traiectoria orizontală; b) distanța față de baza obstacolului la care cade glontele pe sol; c) la ce înălțime față de sol și după cît timp de la ieșirea din obstacol energia cinetică a glontelui este de 10 ori mai mare ca energia potențială.

1.114. Un cablu flexibil cu lungimea L, avînd masa m pe unitatea de lungime este trecut peste un scripete fără frecare, avînd masa și raza neglijabile. Inițial, cablul este în echilibru. Se trage ușor de un capăt al cablului și acesta începe să se deplaseze accelerat. Să se calculeze viteza cablului în momentul în care celălalt capăt părăsește scripetele.

1.115. Un lanț omogen cu lungimea l și greutatea pe unitatea de lungime $p(N/m)$ este ridicat de pe planul orizontal AB pe planul înclinat BC (fig. 1.115) ce face unghiul α cu ori-

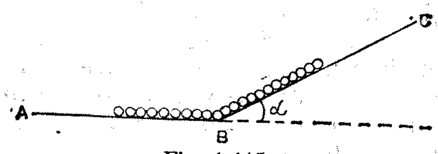

Fig. 1.115.

zontala. Să se calculeze lucrul mecanic cheltuit pentru a efectua ridicarea dacă coeficientul de frecare dintre lanț și planele AB și BC este μ.

1.116. Un fir cu lungimea $l = 1$ m are atîrnat la un capăt un corp de masă $m = 1$ kg. Firul este îndepărtat cu unghiul $\alpha_0 = 60°$ față de verticală și lăsat liber. Să se calculeze: a) tensiunea din fir în funcție de unghiul α; b) deviația unghiulară β dacă un cui plasat pe verticală scurtează lungimea firului cu $l_2 = 0,2$ m; c) raportul tensiunilor din fir cînd pendulul atinge pozițiile extreme, de-o parte și de alta a verticalei.

• **1.117.** O sferă de masă $m = 0,5$ kg este atîrnată de un fir cu lungimea $l = 1$ m aflat în poziție verticală. Sfera primește un impuls care îi imprimă o viteză inițială $v_0 = 4$ m/s. Se cere: a) unghiul α făcut de fir cu verticala cînd sfera se oprește; b) energia cinetică și potențială pentru un unghi $\beta = \alpha/2$; c) unghiul γ pentru care energia cinetică a sferei este un sfert din energia potențială; d) tensiunea din fir în poziția extremă.

• **1.118.** Motorul unui automobil de masă m are o putere constantă P. Coeficientul de frecare cu solul fiind μ să se calculeze: a) dependența accelerației de viteză cînd automobilul se mișcă pe orizontală sau pe un plan înclinat de unghi α; b) viteza maximă pe care o poate atinge pe orizontală și pe planul înclinat.

• **1.119.** Un camion cu masă $m_1 = 200$ kg ce se deplasează cu frecare pe orizontală avînd $\mu_1 = 0,1$ scoate un buștean de masă $m_2 = 400$ kg dintr-o prăpastie prin intermediul unui cablu. Asimilînd prăpastia cu un plan înclinat de adîncime $h = 10$ m, de unghi $\alpha = 45°$ și cunoscînd coeficientul de frecare dintre buștean și sol $\mu_2 = 0,2$, se cere: a) lucrul mecanic necesar pentru scoaterea uniformă a bușteanului din prăpastie; b) lucrul mecanic necesar pentru a scoate bușteanul în timp $t = 10$ s, într-o mișcare uniform accelerată; c) tensiunea din fir în mișcarea accelerată; d) puterea medie a motorului cînd scoaterea bușteanului se face uniform accelarat; e) puterea maximă dezvoltată de motorul camionului în condițiile punctului b.

1.120. Pe suprafața netedă a unei platforme se află o sferă cu raza R. Platforma începe să se deplaseze cu viteza v_0. Să se calculeze proiecția orizontală a vitezei sferei în momentul în care aceasta cade pe podea.

1.121. Un cub de masă M se sprijină pe un perete în modul arătat în figura 1.121. Nu există frecare între perete și cub, dar frecarea dintre cub și podea este suficientă pentru a opri alunecarea cubului. Dacă $0 < \theta < 45°$, să se găsească coeficientul minim de frecare în funcție de θ. Să se verifice dacă răspunsul este posibil aflînd valorile lui μ pentru $\theta = 0$ și $\theta = 45°$ și calculînd valoarea lui θ pentru $\mu = 1$.

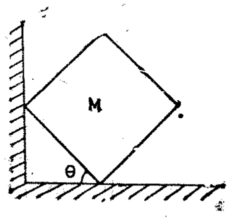

Fig. 1.121.

1.122. Un cărucior coboară fără frecare o pantă la a cărei extremitate inferioară se află o pistă sub forma unui semicerc în plan vertical de rază R. De la ce înălțime H trebuie să plece căruciorul pentru a parcurge curba fără să părăsească pista?

• **1.123.** De o tijă verticală este fixată o tijă orizontală de lungime l_1. La celălalt capăt al tijei orizontale este fixat un fir cu plumb, de lungime l_2, la capătul firului fiind legat un corp de masă m. Tot sistemul se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară ω (fig. 1.123). Să se calculeze: a) unghiul α făcut de firul cu plumb cu verticala, în timpul rotației; b) energia totală necesară punerii corpului în rotație; c) alungirea Δl a firului în timpul rotației dacă se cunosc secțiunea S a firului și modulul de elasticitate.

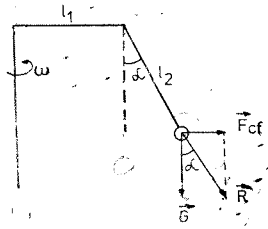

Fig. 1.123.

1.124. Un corp cu masa m pornește din repaus din punctul superior A al unei sfere de rază R, fără frecare și alunecă pe sferă sub acțiunea greutății. a) Ce distanță parcurge particula înainte de a părăsi sfera? b) Să se calculeze la ce distanță față de punctul diametral opus lui A atinge particula solul.

1.125. Un corp alunecă spre baza unui plan înclinat unde intră într-un cerc pe care se deplasează în continuare (fig. 1.125). Să se determine mărimea unghiului $\alpha(\alpha < 90°)$ al segmentului ce poate fi tăiat din cerc știind că acest corp ajunge în punctul B după ce parcurge distanța AB prin aer.

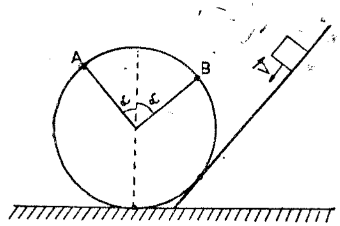

Fig. 1.125.

• **1.126.** Un corp de masă $m = 10$ kg se deplasează pe orizontală cu frecare avînd $\mu = 0,05$ și viteza inițială $v_0 = 12$ m/s. La distanța $d = 32$ m lovește capătul liber al unei bare de cauciuc a cărei axă este situată pe direcția de deplasare a corpului, celălalt capăt al barei fiind fix. Cunoscînd lungimea $l_0 = 0,8$ m și secțiunea barei de cauciuc $S = 2$ cm^2 iar modulul de elasticitate $E = 4 \cdot 10^8$ N/m, se cere: a) viteza v_1 înainte de a ciocni bara de cauciuc; b) scurtarea Δl a barei de cauciuc datorită lovirii acesteia de către corp, considerînd că deformarea barei se face după legea Hooke; c) tensiunea maximă din bară.

• **1.127.** Un corp cu masa $m = 400$ kg este tras pe un plan înclinat cu ajutorul unui cablu paralel cu direcția planului. Unghiul planului înclinat este $\alpha = 30°$, iar corpul se deplasează cu frecare avînd $\mu = 0,1$. Cablul are $l_0 = 5$ m, secțiunea $S = 10$ cm^2, iar $E =$

$= 2 \cdot 10^{11}$ N/m^2 şi se cere: a) raportul alungirilor cablului în cazul deplasării uniforme şi uniform accelerate cu acceleraţia $a = 2$ m/s^2; b) raportul energiilor potenţiale de deformare în cele două cazuri; c) energia de deformare minimă a cablului în cazul deplasării uniforme a corpului pe planul înclinat.

1.128. Să se calculeze forţa cu care un gimnast cu masa $m = 60$ kg acţionează asupra unei plase elastice atunci cînd sare de la înălţimea $h = 8$ m, dacă sub acţiunea greutăţii gimnastului plasa se întinde cu $x_0 = 16$ cm.

1.129. Un cilindru lung şi neted cu raza R este înclinat cu unghiul α faţă de orizontală (fig. 1.129). Din punctul A de pe suprafaţa interioară a cilindrului este aruncat un corp cu dimensiuni neglijabile. Vectorul vitezei iniţiale a corpului formează unghiul φ cu dreapta AB. Să se calculeze viteza iniţială minimă a corpului pentru care acesta nu părăseşte suprafaţa cilindrului.

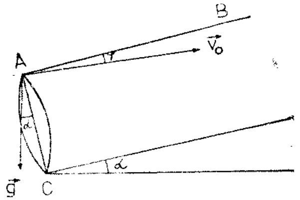

Fig. 1.129.

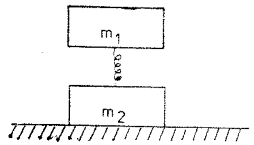

Fig. 1.130.

• **1.130.** Două corpuri de mase m_1 şi m_2 sînt legate printr-un resort de masă neglijabilă (fig. 1.130). Ce forţă trebuie aplicată corpului superior pentru a desprinde corpul inferior de pe suprafaţa orizontală?

• **1.131.** Două corpuri sînt legate la capetele unui fir inextensibil trecut peste un scripete (fig. 1.131). Primul corp se găseşte pe o suprafaţă cu asperităţi şi al doilea atîrnă de fir. Dacă se imprimă celui de al doilea corp un impuls în jos el coboară pe o distanţă $h_1 = 20$ cm. Dacă se imprimă corpurilor aceeaşi viteză trăgînd primul corp spre stînga atunci cel de al doilea corp se ridică cu $h_2 = 10$ cm. Să se calculeze coeficientul de frecare dintre primul corp şi suprafaţa orizontală dacă raportul celor două mase este $m_1/m_2 = 5$.

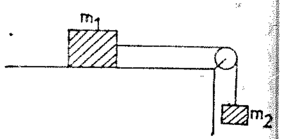

Fig. 1.131.

1.132. Un corp de masă $m = 1$ kg alunecă fără viteză iniţială pe un plan înclinat ($\alpha = 30°$). După ce parcurge distanţa $d = 100$ m pe planul înclinat corpul se deplasează pe un plan orizontal. Coeficientul de frecare pe planul înclinat şi pe cel orizontal este $\mu_1 = 0{,}1$. După ce parcurge distanţa $l = 10$ m pe suprafaţa orizontală, corpul atinge marginea interioară a unui perete semicilindric cu generatoarele verticale (fig. 1.132), deplasîndu-se de-a lungul peretelui cu un coeficient de frecare $\mu_2 = \ln(2/\pi)$ (frecarea cu planul orizontal fiind neglijabilă). Se cere să se determine: a) viteza v a corpului la baza planului înclinat; b) timpul t scurs de la începutul mişcării pînă cînd corpul atinge marginea interioară a peretelui semicilindric şi viteza acestuia în acelaşi punct; c) viteza v_f a corpului la ieşirea din spaţiul peretelui semicilindric.

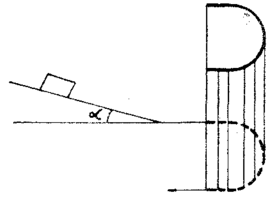

Fig. 1.132.

1.4. Impulsul mecanic

1.133. O rachetă lansată vertical explodează în punctul de înălţime maximă. În urma exploziei rezultă trei fragmente. Să se arate că vectorii vitezelor iniţiale ale celor trei fragmente se află în acelaşi plan.

• **1.134.** Impulsul unui corp în cădere liberă a crescut cu $\Delta H = 80$ kg · m/s în timpul $\Delta t = 4$s. Viteza corpului la sol fiind $v = 50$ m/s, să se calculeze: a) energia potenţială iniţială a corpului: b) înălţimea faţă de sol la care energia cinetică este egală cu energia potenţială; c) forţa de rezistenţă a solului dacă corpul pătrunde pe distanţa $d = 6$ cm în sol.

• **1.135.** Un tun care nu este înzestrat cu un dispozitiv de contrarecul, se află pe o platformă orizontală. Un proiectil cu o masă m şi viteza iniţială v_0 este lansat sub un unghi α faţă de orizontală. Considerînd coeficientul de frecare între tun şi platformă μ să se determine viteza transmisă tunului imediat după şoc dacă acceleraţia proiectilului în ţeavă este mult mai mare decît aceea a căderii libere.

• **1.136.** O moleculă dintr-un gaz cu viteza $v = 600$ m/s şi de masă $m = 4{,}65 \cdot 10^{-26}$ kg se ciocneşte de peretele vasului sub un unghi $\varphi = 60°$ faţă de normala la perete. Să se afle reacţiunea exercitată de perete dacă timpul de interacţiune este $\tau = 10^{-8}$ s.

1.137. Un corp cu masa $m_1 = 2$kg care se mişcă cu viteza $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ (m.s) ciocneşte inelastic un alt corp cu masa $m_2 =$

$= 3$ kg ce are viteza $\vec{v}_2 = -2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$. Să se calculeze viteza particulei compuse.

• **1.138.** Un vagon cu masa $m_1 = 10$ t se deplasează pe un traseu orizontal cu viteza inițială $v_0 = 15$ m/s. După un timp $t_1 = 10$ s el ciocnește un al doilea vagon de masă $m_2 = 12,5$ t, care stă pe linie și cu care continuă mișcarea pînă la oprire. Cunoscînd $\mu = 0,2$, se cere : a) viteza v_1 în momentul ciocnirii și spațiul l_1 parcurs de primul vagon pînă la ciocnire ; b) spațiul și timpul pînă la oprire parcurs de cele două vagoane ; c) energia degajată în ciocnirea plastică și lucrul mecanic total al forțelor de frecare.

• **1.139.** Un cîrlig cu masa $m_1 = 25$ g este suspendat la capătul unui resort de masă neglijabilă cu constanta elastică $k = 15,3$ $N \cdot m^{-1}$. O masă $m = 50$ g cade de la înălțimea $h = 9$ cm pe cîrligul aflat în repaus și se ciocnește inelastic cu acesta. Care este distanța minimă la care ajunge masa m față de poziția sa inițială ?

• **1.140.** La capetele unei bare fără greutate, care se poate roti în jurul axei orizontale, ce trece prin mijlocul ei, sînt fixate două corpuri de mase $m_1 = 0,6$ kg și $m_2 = 2m_1$. În poziția inițială bara este orizontală și apoi este lăsată liberă. Să se calculeze forța cu care acționează primul corp asupra barei în momentul în care bara trece prin poziția verticală.

• **1.141.** Viteza unui glonte poate fi măsurată cu ajutorul pendulului balistic. Glontele, avînd masa m cunoscută, pătrunde într-un bloc de lemn cu masa M, aflat în repaus și agățat de un fir cu lungimea L. Blocul de lemn începe să penduleze. Cunoscînd amplitudinea A a pendulului să se calculeze viteza glontelui. (Se va ține seama că $A \ll L$).

• **1.142.** Un corp cu masa $m_1 = 1$ kg se aruncă vertical în sus cu $v_{01} = 40$ m/s. După $\Delta t = 2s$ se aruncă pe aceeași verticală un al doilea corp de masă $m_2 = 2$ kg ce îl ciocnește pe primul cînd acesta a atins punctul de înălțime maximă. Dacă ciocnirea este plastică se cere : a) viteza inițială a celui de-al doilea corp ; b) timpul scurs din momentul lansării primului corp pînă la atingerea solului ; c) viteza cu care corpurile ating solul ; d) energia degajată în ciocnirea plastică.

1.143. Un corp de masă m_1 ce se mișcă cu viteza $\vec{v}_1$ ciocnește perfect neelastic un corp de masă m_2 ce se mișcă cu viteza $\vec{v}_2$. Dacă unghiul dintre vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ este α, se cere să se determine : a) unghiurile α_1 și α_2 formate de vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ cu direcția comună de mișcare, precum și viteza comună $\vec{v}_c$; b) energia degajată în ciocnirea plastică. Discuție.

• **1.144.** Un plan înclinat de masă M se află pe o suprafață orizontală pe care se poate deplasa fără frecare (fig. 1.144). Se așează pe planul înclinat la înălțimea $H = 1,3$ m un corp cu masa m, care este lăsat liber. Raportul maselor este $n = m/M = 0,6$, iar înălțimea $h = 0,5$ m. Frecarea este neglijabilă. Să se calculeze distanța dintre poziția corpului în momentul atingerii planului orizontal și poziția planului înclinat în momentul în care este părăsit de corp.

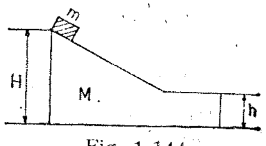

Fig. 1.144.

1.145. Un neutron cu energia cinetică E_c ciocnește frontal un nucleu de carbon ^{12}C ($m_C = 12$ m_n) aflat în repaus și ricoșează perfect elastic în direcția din care a venit. Să se arate cum variază energia cinetică a neutronului.

• **1.146.** Două bile de mase m_1 și m_2 sînt suspendate de două fire paralele de lungime l_1 și l_2, astfel încît în poziție verticală ele se ating. Prima bilă este deviată cu unghiul α față de verticală și i se imprimă o viteză inițială v_0 (fig. 1.146). Se cere să se determine : a) care este unghiul maxim făcut cu verticala după ciocnire și ce energie se degajă dacă ciocnirea este plastică ? b) ce unghiuri α_1 și α_2 vor face pendulele cu verticala după ciocnire în cazul ciocnirii elastice ?

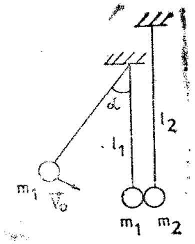

Fig. 1.146

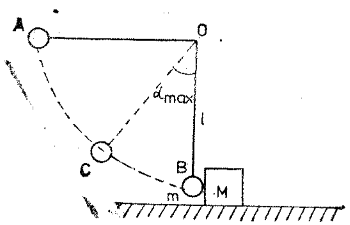

Fig. 1.147.

• **1.147.** Un pendul cu lungimea l și masa m este deplasat din poziția de echilibru pînă cînd firul este orizontal și apoi lăsat liber. La revenire în poziția de echilibru pendulul ciocnește un cub de masă M, așezat pe un plan orizontal (fig. 1.147). Cunoscînd coeficientul de frecare μ dintre cub și plan să se calculeze : a) unghiul maxim α_{max} cu care deviază firul după ciocnirea elastică cu cubul ; b) spațiul parcurs de cub pînă la oprire.

1.148. O particulă 1 ciocnește perfect elastic o particulă 2, aflată în repaus. Să se determine raportul maselor lor dacă : a) ciocnirea este centrală (vitezele au aceeași direcție) și particulele au viteze egale, de sensuri opuse, după ciocnire ; b) direcțiile particulelor după ciocnire fac un unghi $\theta = 60°$ și sînt simetrice în raport cu direcția inițială a particulei 1.

1.149. O particulă cu masa m_1 ciocnește perfect elastic o particulă de masă m_2, aflată inițial în repaus. Să se calculeze : a) a cîta parte din energia cinetică inițială a particulei de masă m_1 este pierdută prin ciocnire dacă viteza ei după ciocnire face un unghi drept cu direcția inițială ; b) unghiul făcut de direcțiile celor două viteze după ciocnire dacă $m_1 = m_2$.

1.150. Un corp ciocnește un alt corp aflat în repaus și avînd aceeași masă. Să se arate că unghiul făcut de direcțiile vitezelor după ciocnire este : a) egal cu $\pi/2$ dacă ciocnirea este perfect elastică; b) diferit de $\pi/2$ dacă ciocnirea este plastică.

• **1.151.** Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află cîte un om, astfel încît masa bărcii și a omului este M, iar în barca din mijloc există și doi saci de mase m fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați cei doi saci unul spre barca din față, celălalt spre barca din spate cu aceeași viteză relativă u față de barcă. Care vor fi vitezele finale ale bărcilor dacă sacii sînt aruncați a) simultan ; b) succesiv ?

• **1.152.** Un corp este aruncat sub un unghi de 45° față de orizontală cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. La $t_0 = 2$s după aruncare, corpul se rupe în două fragmente cu masele în raportul 1 : 2. Fragmentul mai mic capătă o viteză suplimentară orizontală în sensul de aruncare $v_1 = 50$ m/s. Să se calculeze distanța S_2 parcursă de fragmentul mai mare pînă la cădere dacă se știe că fragmentul mai mic cade la distanța $S_1 = 83$ m de locul de aruncare. Se neglijează rezistența aerului.

• **1.153.** Un vagon cu masa M se poate deplasa fără frecare pe un drum orizontal. Un pendul matematic (o sferă cu masa m suspendată de un fir de lungime l) este suspendat de vagon (fig. 1.153). La momentul inițial vagonul este în repaus, iar pendulul face un unghi α cu verticala fiind, de asemenea, în repaus. a) Să se determine viteza vagonului în momentul cînd firul face un unghi β ($\beta < \alpha$) cu verticala. b) Să se determine viteza vagonului cînd firul face unghiul $\beta = 0$ cu verticala considerînd $m/M \ll 1$.

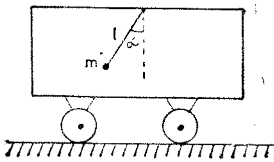

Fig. 1.153.

• **1.154.** Un corp de masă m este suspendat cu un fir de lungime l într-un punct A situat pe suprafața unui tavan. La momentul inițial firul face unghiul α_0 cu verticala. Corpul este lăsat liber, iar la trecerea prin poziția verticală firul se rupe. În acest moment pe suprafața unui plan orizontal dintr-un punct B situat pe verticala firului pornește un corp de masă m_1 cu o viteză paralelă cu viteza corpului de masă m în momentul ruperii firului. Coeficientul de frecare cu planul orizontal este μ. Cunoscînd că distanța dintre tavan și planul orizontal este $h + l$ și că cele două corpuri se ciocnesc plastic se cere : a) Timpul după care are loc ciocnirea celor două corpuri și viteza inițială a corpului m_1 ; b) Considerînd ciocnirea plastică și durata interacțiunii Δt să se determine viteza corpurilor după ciocnire ; c) Spațiul parcurs de corpuri după ciocnire pe suprafața planului orizontal.

• **1.155.** Un proiectil de masă $m = 50$ g ciocnește orizontal un corp de masă $M = 400$ g care este legat de un resort orizontal cu constanta elastică $k = 80$ N/m (fig. 1.155). Să se calculeze : a) viteza v_1 a proiectilului dacă în urma ciocnirii rămîne în corpul M, iar resortul se comprimă cu $\Delta l = 0{,}1$ m, coeficientul de frecare între corp și plan fiind $\mu = 0{,}1$; b) viteza v_2 a proiectilului dacă în urma ciocnirii elastice cu corpul M, proiectilul sare înapoi cu viteza $v' = 1$ m/s, iar resortul se comprimă cu $\Delta l' = 0{,}8$ m, cînd $\mu = 0{,}1$; c) neglijînd frecarea în condițiile punctului b, să se scrie ecuația de mișcare a sistemului.

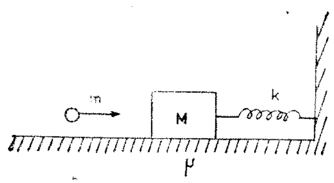

Fig. 1.155.

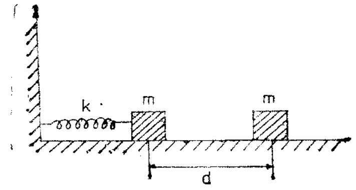

Fig. 1.156.

• **1.156.** Un corp de masă m este legat de un perete prin intermediul unui resort cu constanta elastică k. La distanța d de corp se află un alt corp cu aceeași masă (fig. 1.156). Să se calculeze viteza minimă ce trebuie imprimată corpului din dreapta pentru ca după ciocnirea celor două corpuri, cel din stînga să se întoarcă în poziția sa inițială. Coeficientul de frecare al corpurilor pe suprafață nu depinde de viteză și este egal cu μ ; ciocnirea celor două corpuri se va considera perfect elastică.

1.157. Un corp de masă $M = 1$ kg efectuează o oscilație armonic[ă] pe o suprafață orizontală netedă (fig. 1.157). În momentul trecer[ii] corpului prin poziția sa de echilibru cade vertical pe el o bucată d[e] plastilină de masă $m = 0{,}21$ kg și se lipește de acesta. Să se calculeze de cîte ori variază amplitudinea de oscilație a corpului.

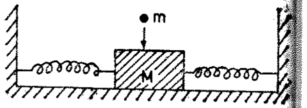

Fig. 1.157.

1.158. Două corpuri cu aceeași masă m, legate printr-un resort cu lungimea l se află în repaus pe o suprafață orizontală netedă. Coeficientul de elasticitate al resortului este k. U[n] al treilea corp cu aceeași masă m imprimă prin ciocnire elastică viteza [...] corpului din stînga. a) Să se arate că cele două corpuri legate pri[n] resort se vor mișca întotdeauna în același sens; b) Să se determin[e] vitezele corpurilor cînd resortul este comprimat cu valoarea maximă.

1.159. De un resort cu lungimea inițială l_0 și constantă elastică k atîrnă un corp de masă m_1. Corpul m_1 este ciocnit elastic de corpu[l] m_2 a cărui viteză orizontală este v_2. Se cere : a) energia potențială d[e] natură elastică înmagazinată de resort în poziție inițială;

b) energia cinetică a corpului m_1 după ciocnire;

c) unghiul maxim (α) cu care va devia resortul de la poziți[a] inițială; d) Se oprește resortul. I se dă o mișcare de rotație încît re[-]sortul face unghiul α cu axa verticală. Se cere alungirea și turați[a] în aceste condiții.

1.160. O bilă cade liber de la înălțimea h pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală (fig. 1.160). Să se determine raportu[l] distanțelor succesive dintre punctele în care bila ciocnește planul, considerînd că ciocnirile sînt perfect elastice.

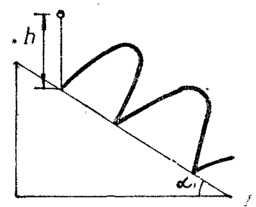

Fig. 1.160.

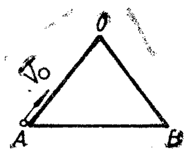

Fig. 1.161.

1.161. Două plane înclinate cu același unghi față de orizontală ($\alpha = \pi/4$) și de aceeași lungime sînt lipite (fig. 1.161). O bilă de oțel, care se află în punctul A de la baza planului stîng este lansată cu viteza V_0 pe direcția AO. Să se determine valoarea vitezei V_0 pentru care bila cade în punctul B. Se vor considera ciocnirile cu planul perfect elastice.

1.5. Pendul gravitațional

1.162. Un corp de masă de 1 kg este atîrnat de capătul unui fi[r] inextensibil. Se imprimă pendulului matematic format o mișcar[e] în plan vertical cu amplitudinea unghiulară $\alpha = \pi/3$ și perioad[a] $T = \pi/\sqrt{2}$ s. Să se calculeze : a) viteza maximă atinsă de corp în timpu[l] oscilației; b) limitele între care variază tensiunea din fir în timpu[l] oscilației; c) raportul dintre energiile cinetică și potențială în punctu[l] de elongație $\beta = \pi/6$.

1.163. Un pendul matematic care bate secunda este forma[t] dintr-un fir inextensibil de care atîrnă o bilă cu masa $m = 1$ kg. Să se calculeze : a) viteza inițială v_0 necesară pendulului pentru a ave[a] o amplitudine unghiulară maximă $\varphi = \pi/3$ rad dacă în poziți[a] inițială firul face un unghi $\varphi_0 = \pi/6$ rad cu poziția de repaus; b) un[-]ghiul făcut de fir cu verticala în momentul ruperii acestuia, știin[d] că tensiunea maximă suportată de fir este $T = 20$ N; c) Considerîn[d] că imediat după ruperea firului, bila lovește o bară de cauciuc așe[-]zată pe un plan orizontal și fixată la un capăt, să se determine scur[-]tarea barei de cauciuc, dacă ea are lungimea $L = 0{,}2$ m, aria secțiuni[i] $S = 1$ cm^2 și modulul de elasticitate $E = 4 \cdot 10^6$ N $\cdot$ m^{-2}. Se va lu[a] $g = 10$ m/s^2.

1.164. O macara al cărei scripete se află la înălțimea $h_0 = 36$ m față de sol ridică uniform o piesă de la sol pînă la înălțimea h în tim[-]pul $t = 4$ s efectuînd un lucru mecanic $L = 58{,}8$ kJ. După oprir[e] la înălțimea h piesa efectuează mici oscilații cu perioada $T = 8$ s. La un moment dat piesa cade liber de la înălțimea h într-un bazi[n] cu adîncimea $S = 9$ m. Să se calculeze : a) înălțimea h la care a fos[t] ridicată piesa; b) masa piesei; c) viteza cu care atinge piesa fundu[l] bazinului știind că densitatea piesei este de trei ori mai mare ca [a] apei.

1.165. Un corp de masă m este suspendat de un fir prins pe u[n] stativ fixat pe un cărucior. Să se calculeze tensiunea T din fir ș[i] unghiul φ al firului cu verticala în cazurile cînd căruciorul : a) s[e] mișcă cu accelerația orizontală constantă a; b) urcă, respectiv co[-]boară cu accelerația constantă a_1 pe un plan înclinat de unghi α; c) coboară liber pe planul înclinat amintit, cu coeficientul de frecar[e] μ; d) Să se calculeze perioada pendulului simplu în fiecare ca[z].

1.166. Un pendul bate secunda la pol. Cunoscînd raza Pămîn[-]tului $R = 6400$ km și accelerația gravitațională la pol $g_p = 9{,}82$ m/s[^{2}] să se calculeze : a) perioada pendulului plasat la ecuator; b) cu cî[t] ar trebui scurtat sau lungit pendulul pentru a bate secunda și l[...]

ecuator; e) care este raportul perioadelor pendulului la latitudinile $\alpha = 45^\circ$ și $\beta = 30^\circ$.

1.167. Un pendul astronomic, care bate secunda, se află la sol. Cu cît va rămîne el în urmă în 24 de ore dacă este transferat la o înălțime de 200 m față de sol?

1.168. Un ceas cu pendul care bate secunda la ecuator ($g_e = 9{,}78$ m/s^2) este ridicat la o altitudine $h = 500$ km, pe verticala locului. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6400$ km, să se calculeze: a) perioada pendulului la înălțimea h; b) cu cît ar trebui scurtat sau lungit pendulul pentru a bate secunda și la înălțimea h; c) perioada pendulului plasat la ecuator, dacă Pămîntul și-ar micșora viteza unghiulară de două ori.

1.169. Într-un vagonet de mină atîrnă un pendul matematic de lungime l. Vagonetul este ridicat pe o galerie verticală cu un ascensor la înălțimea h. La pornire ascensorul se mișcă uniform accelerat cu accelerația a pe distanța $h/8$; apoi uniform pînă la distanța $h/8$ de oprire, mergînd în continuare uniform încetinit cu accelerația a. De la gura minei unde s-a oprit ascensorul vagonetul coboară o pantă de unghi α și lungimea d, fără frecare, după care merge orizontal uniform încetinit datorită frecării (μ). Dacă înaintea pornirii ascensorului, pendulul oscilează cu amplitudinea unghiulară α_0, neglijînd frecările și considerînd oscilațiile izocrone, să se determine: a) perioadele pendulului pentru cele 5 porțiuni distincte ale drumului parcurs de vagonet; b) tensiunea maximă din fir pe prima porțiune; c) numărul de oscilații efectuate de pendul pe fiecare din cele cinci porțiuni ale drumului parcurs de vagonet.

1.6. Cîmpul gravitațional

• **1.170.** Două corpuri de mase $m_1 = 500$ kg și $m_2 = 1000$ kg se află la distanța $d = 1$ m. Să se calculeze intensitatea cîmpului gravitațional într-un punct M situat la $d_1 = 0{,}6$ m față de m_1 și $d_2 = 0{,}9$ m față de m_2.

• **1.171.** Se aruncă un proiectil pe verticală de la suprafața Pămîntului cu viteza inițială $v_0 = 10$ km/s. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6400$ km și neglijînd frecările ca și rotația Pămîntului să se calculeze înălțimea maximă la care urcă corpul.

• **1.172.** Un satelit artificial al Pămîntului se ridică la o înălțime h, la care energia lui potențială este egală cu energia lui cinetică. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6400$ km și accelerația gravitațională la suprafața Pămîntului $g_0 = 10$ m/s^2, se cere: a) înălțimea la care se află satelitul; b) viteza liniară de rotație a satelitului; c) numărul de rotații efectuate în timpul $t = 24$ h.

• **1.173.** La ce înălțime trebuie lansat un satelit artificial al Pămîntului pentru ca energia lui potențială să fie de două ori mai mare ca energia cinetică.

1.174. Cunoscînd raza orbitei Pămîntului $R_1 = 1{,}5 \cdot 10^8$ km, raza Soarelui $R_2 = 6.10^5$ km și perioada de rotație a Pămîntului în jurul Soarelui $T = 1$ an, să se calculeze: a) accelerația în cădere liberă a corpurilor pe Soare; b) masa și densitatea medie a materiei solare și a Pămîntului.

1.175. Un corp cu masa $m = 1$ kg cade de la suprafața Pămîntului printr-un tunel imaginar ce trece prin centrul acestuia. Cunoscînd raza Pămîntului $R = 6400$ km, să se calculeze: a) elementele mișcării oscilatorii armonice ale corpului; b) viteza maximă și accelerația maximă; c) energia totală a corpului.

1.176. Un corp de masă m suspendat de un punct fix prin intermediul unui fir se află în echilibru relativ la suprafața Pămîntului și la nivelul mării. Să se calculeze deviația firului de la verticala locului a) la pol, b) la ecuator, c) la latitudinea de 45° nordică. Ce se întîmplă pentru latitudinea sudică de 45°?

• **1.177.** Se plasează un satelit artificial al Pămîntului astfel încît el să rămînă tot timpul deasupra aceluiași punct de pe suprafața sa (astfel de sateliți numiți staționari sînt utilizați în retransmisii radio și T.V.). Să se determine: a) înălțimea la care trebuie plasat un astfel de satelit; b) perioada sa de rotație; c) Poate fi planul orbitei unui astfel de satelit, planul ecuatorial? Raza Pămîntului este $R_P = 6400$ km.

1.178. Un satelit plasat pe o orbită circulară de rază $R = 2 \cdot 10^4$ km într-un plan ecuatorial al Pămîntului se mișcă de la vest spre est și revine după $\tau = 11{,}6$ h deasupra aceluiași punct ecuatorial. Să se calculeze masa Pămîntului știind valoarea constantei de atracție universală $k = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m$^3 \cdot$ kg$^{-1} \cdot$ s^{-2}.

1.179. Cu ce viteză minimă față de Soare trebuie lansată de pe Pămînt o stație interstelară pentru a ieși din sistemul solar cu viteza $v' = 16{,}7$ km/s. Viteza Pămîntului pe orbită în jurul Soarelui este $v_0 = 30{,}8$ km/s, raza Pămîntului $R = 6400$ km și accelerația la suprafața Pămîntului $g_0 = 9{,}8$ m/s^2.

• **1.180.** O rampă de lansare, oblică, are lungimea $l = 50$ m și $\alpha = 30^\circ$. O rachetă cu masa $m = 100$ kg pornind din repaus, părăsește rampa cu viteza $v_0 = 40$ m/s. Coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$, se cere: a) puterea medie a motorului rachetei în cursul mișcării pe rampă; b) racheta este accelerată în continuare, devenind un satelit artificial al Pămîntului cu traiectoria circulară. Pentru aceasta se mai consumă un lucru mecanic $L = 2{,}5 \cdot 10^9$ J. Care este

viteza rachetei satelit pe traiectoria circulară; c) cunoscînd raza Pămîntului $R = 6400$ km, la ce înălțime de sol se rotește satelitul?

1.181. Un cosmonaut, pregătit să plece pe Lună, atîrnă pe Pămînt un corp de masă m_1 de un dinamometru și citește indicația de 10 N. Ajungînd pe Lună, atîrnă un alt corp de masă m_2 de același dinamometru și citește indicația tot de 10 N. Atîrnînd cele două corpuri la capetele unui fir trecut peste un scripete fix, pe Lună, observă că masa m_2 cade cu accelerația $a = 1{,}19$ m/s². Să se calculeze masa m_2 dacă $g_p = 10$ m/s².

1.7. Cinematica și dinamica rigidului

1.182. O bilă de masă $m = 0{,}1$ kg, legată de un punct fix printr-un fir de lungime $l_1 = 0{,}6$ m, execută o mișcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted cu turația $n_1 = 1$ rot/s. Să se calculeze: a) turația bilei dacă firul se scurtează la lungimea $l_2 = 0{,}3$ m; b) impulsul bilei în cele două cazuri; c) lucrul mecanic efectuat pentru scurtarea firului; d) forța necesară pentru a ține raza constantă.

1.183. Două sfere cu masele $m_1 = 100$ g și $m_2 = 200$ g sînt legate printr-o tijă cu lungimea $l = 50$ cm, de masă neglijabilă. Sistemul se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe tija care trece prin centrul de greutate al sistemului (fig. 1.183) cu viteza unghiulară $\omega = 3$ rad/s. Să se calculeze impulsul, energia cinetică și momentul cinetic al sistemului.

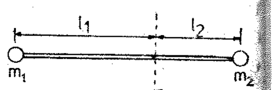

Fig. 1.183.

1.184. Un om se află pe un disc cu care se rotește cu o frecvență $\nu_1 = 0{,}5$ s⁻¹. Axa de rotație trece prin centrul discului și prin centrul de greutate al omului. Momentul de inerție al sistemului om-disc față de axa de rotație este $I_0 = 1{,}6$ kg.m². Omul are mîinile întinse orizontal, în fiecare mînă avînd cîte o greutate cu masa $m = 2$ kg. Distanța dintre cele două greutăți este $l_1 = 1{,}6$ m. Să se determine frecvența de rotație ν_2 a omului în momentul cînd el are mîinile coborîte, distanța dintre greutăți fiind $l_2 = 0{,}4$ m.

1.185. Pe o platformă orizontală în formă de disc, care se poate roti liber în jurul axului său vertical fix, cu moment de inerție I, se află la distanța R de centru un om cu masa m (considerat punct material). Omul se deplasează radial către centrul platformei pînă la o distanță $r < R$. Cunoscînd viteza unghiulară ω_0 să se calculeze: a) viteza unghiulară ω a sistemului în funcție de r; b) variația energiei cinetice a sistemului; c) cum se modifică aceste rezultate cînd $r > R$.

1.186. O sferă omogenă de rază r se rostogolește fără frecare din punctul de înălțime maximă al unei sfere de rază R (fig. 1.186). Să se calculeze viteza unghiulară a sferei mici în momentul în care ea părăsește suprafața celei de a doua sfere. Momentul de inerție al unei sfere în raport cu centrul său de greutate este $I = \frac{2}{5} mr^2$.

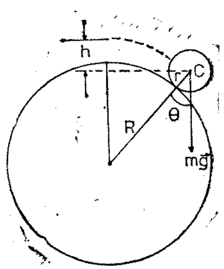

Fig. 1.186.

1.187. Un disc cilindric de masă $m_1 = 2$ kg și diametrul $d_1 = 2$m se rotește uniform cu viteza unghiulară $\omega_0 = 10$ rad/s. La un moment dat, discul se cuplează printr-o curea de transmisie cu un al doilea disc avînd masa $m_2 = 1$ kg și diametrul $d_2 = 1$ m, aflat în repaus. Să se calculeze vitezele unghiulare ω_1 și ω_2 ale discurilor după cuplarea lor.

1.188. Un corp de masă $m = 1$ kg efectuează o mișcare circulară uniformă cu viteza $v = 2$ m/s, pe un cerc în plan orizontal. După ce corpul a parcurs un sfert de cerc, să se calculeze: a) variația impulsului; b) variația momentului cinetic; c) variația energiei cinetice a corpului.

1.189. Un om cu masa m_1 se deplasează pe circumferința de rază r a unui disc orizontal aflat inițial în repaus. Discul are masa m_2 și raza R. Discul se poate roti ușor în jurul unui ax vertical care trece prin centrul său. Să se determine viteza unghiulară ω de rotație a discului, cînd omul se deplasează cu viteza v față de disc.

1.190. O platformă circulară cu momentul de inerție I_0 se rotește liber în jurul unui tub vertical gol. Un cărucior de masă m se deplasează pe platformă fără frecare, de-a lungul unei șine radiale (fig. 1.190). Un cablu legat de cărucior trece peste un scripete mic și apoi coboară prin axul vertical. La început întregul sistem se rotește cu viteza unghiulară ω_0, iar căruciorul se află la distanța R de ax, apoi căruciorul este tras spre centru prin aplicarea unei forțe suplimentare asupra cablului și ajunge la distanța r unde va rămîne în repaus. a) Care este noua viteză unghiulară a sistemului? b) Să se arate că variația energiei sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța centripetă; c) Ce viteză radială v_r va avea căruciorul la distanța R de centru dacă se dă drumul cablului?

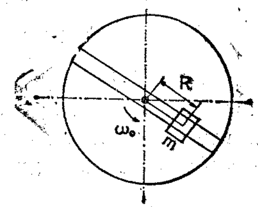

Fig. 1.190.

1.191. În figura 1.191 este prezentată o bară A, cu momentul de inerție I_0, ce se poate roti în jurul unei axe perpendiculară pe ea. Două sfere identice pot aluneca pe bară. Considerăm că la momentul inițial sferele sînt așezate lîngă axa de rotație și sînt legate cu o sfoară. Sistemul începe să se rotească cu viteza unghiulară ω_0. a) Să se calculeze viteza unghiulară finală după ce sfoara ce leagă cele două sfere este tăiată; b) Cum variază energia cinetică a sistemului? Masele bilelor sînt egale cu m, razele lor sînt R_0, iar lungimea barei $2R_1$. Masele bilelor sînt considerate în centrele lor de masă.

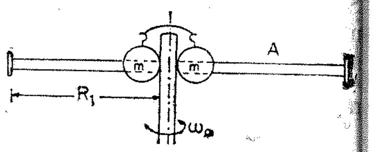

Fig. 1.191.

1.192. O roată cu raza $R_1 = 1$ m și masa $M_1 = 25$ kg este fixată în centrul ei pe axul unui tambur avînd raza $R_2 = 0{,}1$ m și masa $M_2 = 10$ kg. Pe tambur este înfășurată o sfoară iar la capătul ei liber este atîrnat un corp cu masa $m = 6$ kg. Sistemul fiind lăsat liber, se cere: a) accelerația liniară a corpului de masă m; b) tensiunea din fir.

1.193. O sferă se aruncă prin rostogolire pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$ cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s. Coeficientul de frecare de rostogolire fiind $\mu = \sqrt{3}/10$, să se calculeze: a) accelerațiile la urcare și coborîre pe planul înclinat; b) timpul de urcare și spațiul pînă la oprire; c) timpul de coborîre și viteza finală cu care se întoarce la baza planului.

1.194. O sferă de masă $m = 1$ kg se rostogolește fără alunecare cu viteza $v_1 = 6$ m/s, lovește un perete și se întoarce cu viteza $v_2 = 4$ m/s. Să se calculeze cantitatea de căldură Q degajată în acest proces de ciocnire.

1.195. Pe un tambur de rază $R = 0{,}5$ m este înfășurată o sfoară. La celălalt capăt este legat un corp de masă $m = 10$ kg care coboară cu accelerația $a = g/3$. Să se calculeze: a) momentul de inerție I al tamburului; b) tensiunea din fir.

1.196. Pe un tambur de rază $R = 10$ cm și moment de inerție $I = 0{,}42$ kg$\cdot$ m^2 este înfășurată o sfoară de capătul căreia este atîrnat un corp de masă $m = 1$ kg. Să se calculeze: a) accelerația cu care se mișcă corpul de masă m; b) tensiunea din fir; c) cu ce distanță h a coborît corpul de masă m dacă tamburul a căpătat turația $n = 60$ rot/min.

1.197. Un corp de masă m este suspendat de un fir înfășurat pe un cilindru circular de masă M și rază r care se rotește pe lagăre fără frecare, ca în figura 1.197. Să se calculeze accelerația corpului m.

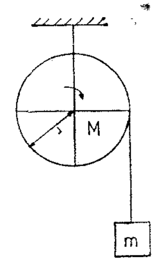

Fig. 1.197.

1.198. Pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ se află un corp de masă $m_1 = 10$ kg legat printr-un fir ce trece peste un scripete fix de masă $m_2 = 0{,}4$ kg. La celălalt capăt al firului pe verticală atîrnă un corp de masă $m_3 = 8$ kg. Coeficientul de frecare dintre corp și plan fiind $\mu = 0{,}1$ să se calculeze: a) accelerația liniară a corpurilor m_1 și m_3 și tensiunile din cele două fire; b) forța rezultantă ce acționează asupra axului scripetelui în timpul mișcării.

1.199. Peste un scripete de rază R și moment de inerție I este trecut un fir la capetele căruia se leagă două corpuri de mase m_1 și m_2. Să se calculeze: a) accelerația cu care se mișcă corpurile m_1 și m_2; b) accelerația unghiulară cu care se rotește scripetele; c) tensiunile T_1 și T_2 din fir.

1.200. Un mosor este format din două discuri omogene, fiecare avînd masa M și raza R și dintr-un cilindru plin cu raza r și masa neglijabilă. Un fir înfășurat în jurul cilindrului este atîrnat în plafon și apoi mosorul este lăsat liber la o distanță D de plafon (fig. 1.200). Să se calculeze: a) Unghiul pe care trebuie să-l formeze firul cu verticala în momentul în care mosorul este lăsat liber pentru ca dispozitivul să nu devină un pendul; b) accelerația de coborîre a centrului de masă al mosorului.

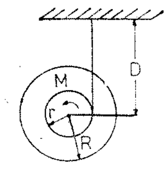

Fig. 1.200.

1.201. Pe două tambure de raze R_1 și R_2 fixate solidar pe același ax sînt înfășurate fire în sensuri opuse la capetele cărora atîrnă corpurile de mase m_1, respectiv m_2 (fig. 1.201). Cunoscînd momentul de inerție total I al celor două tambure să se calculeze: a) accelerația unghiulară ε a tamburelor; b) tensiunile din fire și accelerațiile liniare ale celor două corpuri.

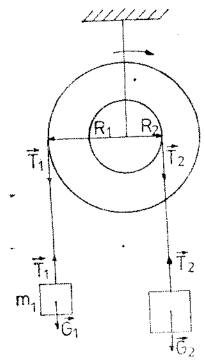

Fig. 1.201.

1.202. Un cilindru cu masa $M_1 = 16$ kg și raza $R_1 = 0{,}5$ m se poate roti în jurul unui ax vertical. Pe cilindru este înfășurat un fir, fixat cu un capăt pe cilindru, de celălalt capăt se atîrnă un corp de masă $m = 1$ kg prin intermediul unui scri-

pete de masă $M_2 = 2$ kg și rază $R_2 = 0,4$ m (fig. 1.202). S cere : a) accelerația liniară a corpului de masă m și tensiunile d fir; b) accelerațiile unghiulare ale cilindrului și scripetelui; c) v teza și spațiul parcurs de corp după $t=4$ s; d) vitezele unghiula ω_1, ω_2 și numărul total de rotații N_1 și N_2 după $t = 4$ s.

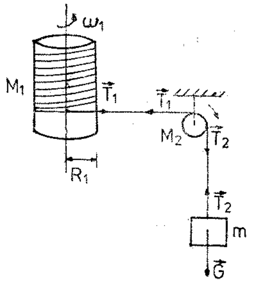

Fig. 1.202.

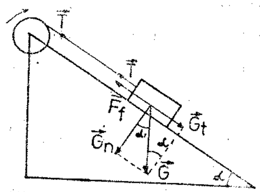

Fig. 1.203.

1.203. Peste un scripete de rază R și momentul de inerție I, fix în vîrful unui plan înclinat de unghi α, este înfășurat un fir întins ap paralel cu planul și legat de un corp de masă m așezat pe planul înclina (fig. 1.203) cu coeficientul de frecare μ. Să se calculeze : accelerația a c care va luneca corpul pe planul înclinat și tensiunea din fir. Discuți

1.204. Pe un plan orizontal se află un corp cu masa $m_1 = 4$ kg. Co pul este legat de un fir inextensibil de greutate neglijabilă care tre peste un scripete fix cu masa $m_2 = 0,2$ kg. De celălalt capăt al firulu este legat un corp cu masa $m_3 = 0,9$ kg. Știind că între corpul de p plan și plan coeficientul de frecare este $\mu = 0,1$, să se determine a) accelerația liniară a corpurilor m_1 și m_3 precum și accelerația un ghiulară ε a scripetelui de rază $R = 0,2$ m; b) valorile tensiunilor di fire; c) care trebuie să fie masa corpului m ce trebuie să-l așezăm peste corpul de masă m_1 încît mișcarea sistemului să devină uniformă.

1.205. În figura 1.205 sînt reprezentați doi cilindri, unul plin (B) și unul gol (A), cu aceeași rază exterioară R și confecționați din același material. Raza interioară a cilindrului A este $r < R$. Cei doi cilindri sînt lăsați liberi simultan de la aceeași înălțime h pe planul înclinat cu unghiul α față de orizontală. Să se arate care din cei doi cilindri va ajunge primul la baza planului înclinat. Momentul de inerție al unui cilindru gol este

$$I = \frac{m}{2} \times (R^2 + r^2).$$

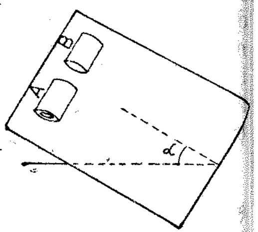

Fig. 1.205.

1.206. Un cerc cu rază r ce se rotește cu viteza unghiulară ω_0 este plasat pe o suprafață pe care se poate mișca cu frecare. Cercului îi este dată viteza de translație v_0 (fig. 1.206). Să se determine natura mișcării cercului presupunînd că forța de frecare este F_{fr}.

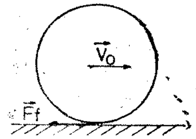

Fig. 1.206.

1.207. Un cerc de rază r aflat pe o suprafață orizontală pe care se deplasează cu frecare are la momentul inițial viteza de translație v_0, în direcție orizontală. Să se determine viteza unghiulară a rotației cercului după ce încetează alunecarea.

1.208. Un cerc de rază r și masă neglijabilă se rotește în jurul unei axe fixe, fiind supus și acțiunii unei forțe de frecare F_{fr} (fig. 1.208). Să se determine variația vitezei cercului în funcție de timp dacă la momentul inițial viteza unghiulară este ω_0.

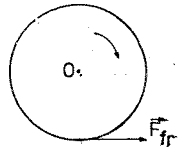

Fig. 1.208.

1.209. Un fir trecut peste un scripete de inerție neglijabilă are un capăt înfășurat pe un cilindru, de masă m_1 și raza R, iar de celălalt este suspendat un corp de masă m_2 (fig. 1.209). Să se determine : a) accelerația mișcării corpului m_2 în cazul cînd cilindrul nu alunecă pe suprafața orizontală; b) tensiunea din fir.

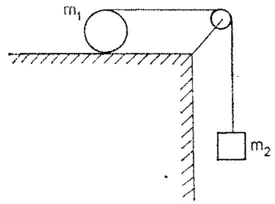

Fig. 1.209.

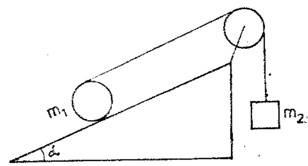

Fig. 1.210.

1.210. Pe un plan înclinat de unghi α este așezat un cilindru omogen de masă m_1 și rază R. Pe cilindru este înfășurat un fir, care este trecut peste un scripete ideal și apoi este legat de un alt corp de masă m_2 (fig. 1.210). Să se calculeze în cazul nealunecării : a) accelerația centrului de masă a cilindrului; b) tensiunea din fir; c) să se determine coeficientul de frecare minim pentru a nu se produce alunecarea cilindrului.

1.211. Un cilindru plin de masă $m_1 = 0,8$ kg și rază $R=10$ cm este așezat pe un plan înclinat de unghi α. Pe cilindru este înfășurat un fir, care este întins (fără frecare) în lungul planului înclinat și după ce este trecut peste un

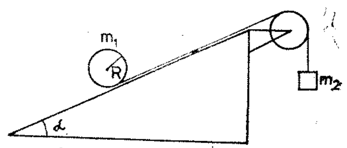

Fig. 1.211.

scripete ideal susține la celălalt capăt un corp cu masa $m_2=0{,}2$ kg (fig. 1.211). Să se calculeze în cazul cînd corpul de masă m_1 se rostogolește fără alunecare: a) tensiunea din fir; b) accelerația centrului de masă al corpului pe planul înclinat; c) coeficientul de frecare minim pentru ca rostogolirea corpului pe plan să se facă fără alunecare.

1.212. Un cerc de masă M și rază R se deplasează orizontal, uniform cu viteza v și se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe ce trece prin centrul său. Să se determine energia sa cinetică.

1.213. Peste un scripete ideal, care se rotește în jurul axei sale orizontale fixe, este trecut un fir. De un capăt al firului este legat un corp de masă m iar celălalt capăt este înfășurat pe un tambur de aceeași masă m_1 de rază R și moment de inerție I (fig. 1.213). a) Să se calculeze accelerația centrului de masă al tamburului; b) Să se calculeze tensiunea din fir.

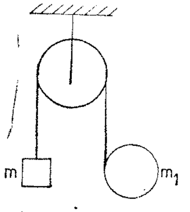

Fig. 1.213.

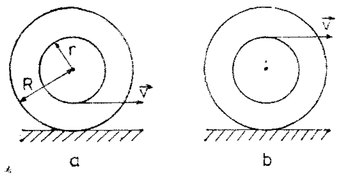

Fig. 1.214.

1.214. Un mosor are un fir înfășurat pe el și se poate rostogoli pe un plan orizontal fără să alunece. Să se determine viteza și direcția axei mosorului dacă un capăt al firului este tras în direcție orizontală cu viteza v. Raza interioară a mosorului este r, raza exterioară R, iar firul se înfășoară ca în figura 1.214 a și b.

1.215. Un tub cilindric cu raza r și masa neglijabilă este prins prin intermediul unor spițe de două cercuri de rază R și masă totală M. Un fir este înfășurat pe tub, trecut peste un scripete și susține la celălalt capăt un corp cu masa m (fig. 1.215). Neglijînd masa firului și a scripetelui să se calculeze: a) accelerația corpului de masă m; b) tensiunea ce apare în fir; c) forța de frecare dintre cercuri și suprafața orizontală în cazul cînd nu există alunecare; d) Să se determine coeficientul de frecare pentru care corpurile vor aluneca.

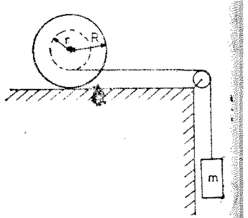

Fig. 1.215.

1.216. O bilă de popice, omogenă, de rază R și masă M este lansată cu viteza inițială v_0 astfel încît să alunece fără rostogolire. Coeficientul de frecare este μ. Ce drum parcurge bila pînă în momentul în care începe să se rostogolească fără alunecare și ce viteză are în acel moment?

1.217. Un mosor cu masa $M = 0{,}3$ kg se află pe un plan înclinat. Un fir este înfășurat pe cilindrul interior al mosorului care are raza $r=1$ cm (fig. 1.217) și după ce este trecut peste un scripete fără greutate susține un corp de masă $m = 0{,}2$ kg. Presupunem că masa mosorului este distribuită pe cercul de rază $R = 1{,}41$ cm și că nu există frecare. Să se determine unghiul de înclinare α pentru care centrul de greutate al mosorului va fi în repaus.

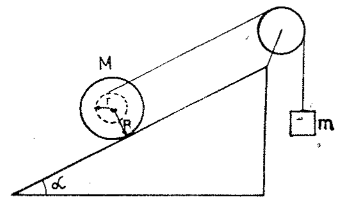

Fig. 1.217.

1.8. Echilibrul mecanic al corpurilor

1.218. În partea inferioară a unei suprafețe conice ce face unghiul α cu orizontala se află un corp cu masa m (fig. 1.218). Conul se rotește în jurul axei sale cu viteza unghiulară ω. Să se determine coeficientul de frecare minim pentru care corpul nu părăsește suprafața conică. Raza bazei conului este R.

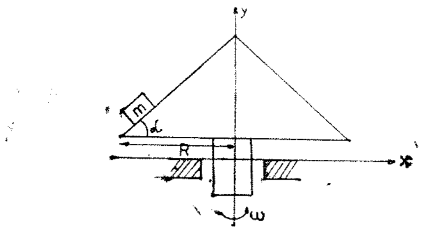

Fig. 1.218.

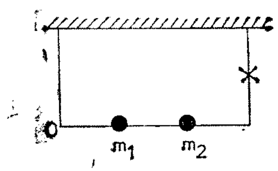

Fig. 1.219.

1.219. O bară fără greutate, de lungime $3l$ este menținută în poziție orizontală cu ajutorul a două fire (fig. 1.219). Două corpuri cu masele m_1 și respectiv m_2 sînt fixate pe bară la distanța l față de capetele ei. Să se determine tensiunea care apare în firul din stînga în momentul cînd firul din dreapta se rupe.

1.220. O forță $\vec{F} = 30\vec{i} + 40\vec{j}$ acționează asupra unui punct material situat în punctul definit prin vectorul de poziție $\vec{r} = 8\vec{i} + 6\vec{j}$. Să se calculeze: a) momentul forței în raport cu originea

axelor de coordonate; b) brațul forței; c) componenta forței $\vec{F}$ pe[r]pendiculară pe $\vec{r}$.

1.221. Asupra unei plăci plane de oțel care plutește pe merc[ur] acționează trei forțe, aplicate în trei din vîrfurile unui pătrat c[u] latura de 0,1 m (fig. 1.221). Să se găsească mărimea și direcția cel[ei] de a patra forțe care, aplicată plăcii, o menține în echilibru.

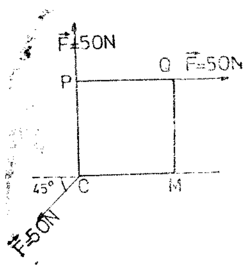

Fig. 1.221.

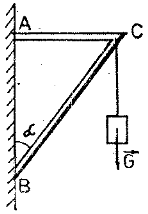

Fig. 1.222.

1.222. Un corp cu greutatea de 87 kN este suspendat ca î[n] figura 1.222. Cunoscînd unghiul $\alpha = 30°$ să se determine forțele ce apar în barele AC și BC. Cum se vor schimba aceste forțe dacă unghiu[l] α crește;

1.223. Un cadru rigid de formă triunghiulară este așezat î[n] plan vertical (fig. 1.223). Unghiurile de la bază au valorile $\alpha = 30°$ și $\beta = 60°$. Pe laturile triunghiului alunecă cu frecare ($\mu = 0{,}01$) două sfere cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg legate cu un fir. Să se calculeze: a) unghiul θ format de fir cu latura AB în cazul echilibrului; b) tensiunea din fir în acest caz.

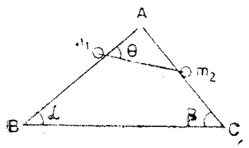

Fig. 1.223.

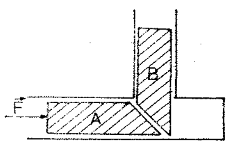

Fig. 1.224.

1.224. În figura 1.224 se vede o parte din desenul simplifica[t] al unui zăvor vertical. Brațul inferior A poate fi împins înainte î[n] canalul orizontal. Pereții canalului sînt netezi, dar la suprafața d[e] contact dintre A și B, care face un unghi de 45° cu orizontala, există un coeficient static de frecare μ. Care este forța minimă F ce trebuie aplicată orizontal lui A pentru a pune zăvorul în mișcare dacă B are masa m?

1.225. Un tablou este prins de un perete vertical cu ajutorul unui fir AC de lungime l care formează unghiul α cu peretele (fig. 1.225). Tabloul are o înălțime BC = d. Partea inferioară a tabloului se sprijină pe același perete. Să se determine coeficientul de frecare μ între tablou și perete pentru ca tabloul să fie în echilibru.

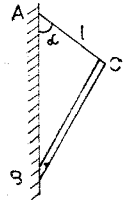

Fig. 1.225.

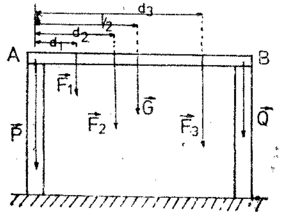

Fig. 1.226.

1.226. O bară AB de lungime l și greutate G se sprijină în punctele A și B pe doi suporți (fig. 1.226). La distanțele d_1, d_2 și d_3 față de capătul A acționează forțele F_1, F_2 și F_3. Să se calculeze: a) coordonata x a punctului de aplicație al rezultantei forțelor; b) forțele P și Q ce acționează asupra celor doi suporți.

1.227. O bară fără greutate are fixate pe ea două corpuri cu masele m și M (fig. 1.227). Bara este articulată în A și se poate roti cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale. Să se calculeze unghiul φ format de bară cu verticala. Distanțele a și b sînt cunoscute.

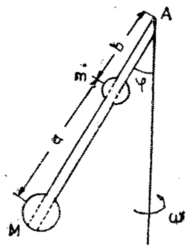

Fig. 1.227.

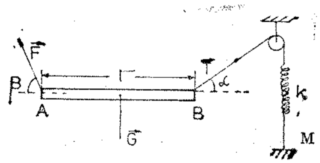

Fig. 1.228.

1.228. O scîndură cu masa $m = 20$ kg și lungimea $l = 1{,}5$ m este articulată în punctul A iar celălalt capăt este prins, printr-un fir inextensibil ce trece peste un scripete fix, prin intermediul unui resort, de punctul M. Constanta elastică a resortului este $k = 10^4$ N/m, iar unghiul făcut de firul ce leagă capătul B cu orizontala este $\alpha = 30°$ (fig. 1.228). Poziția scîndurii fiind orizontală, să se calculeze: a) valoarea alungirii resortului (Δl_0); b) valoarea reacțiunii din articulația A; c) unghiul făcut de reacțiune cu orizontala.

1.229. O scîndură AB cu lungimea $l = 1$ m şi greutate neglij bilă este susţinută prin două resorturi de un tavan (fig. 1.229). stare liberă cele două resorturi au lungimi egale, iar coeficienţii elasticitate sînt $k_1 = 980$ N/m şi $k_2 = 1470$ N/m. Aşezînd pe scîndură o greutate $G = 980$ N, scîndura se înclină cu unghiul $\alpha = 30°$ faţă de orizontală, iar greutatea rămîne fixă pe scîndură. Să se calculeze: a) distanţa x faţă de capătul A la care se aşează greutatea G pe scîndură şi tensiunile T_1 şi T_2 în cele două resorturi; b) valoarea minimă a coeficientului de frecare dintre scîndură şi corp; c) la ce distanţă y faţă de capătul A trebuie pus corpul pe scîndură pe tru ca aceasta să stea în poziţie orizontală şi care sînt tensiuni T_1' şi T_2' în acest caz; d) cum variază unghiul α cu poziţia x.

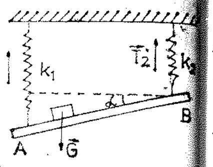

Fig. 1.229.

1.230. Se dau două cuburi de laturi $a = 20$ cm din materia diferite avînd densităţile $\rho_1 = 7800$ kg/m³ şi $\rho_2 = 8500$ kg/m³. Aces cuburi se sudează formînd o prismă. Să se calculeze forţa minimă

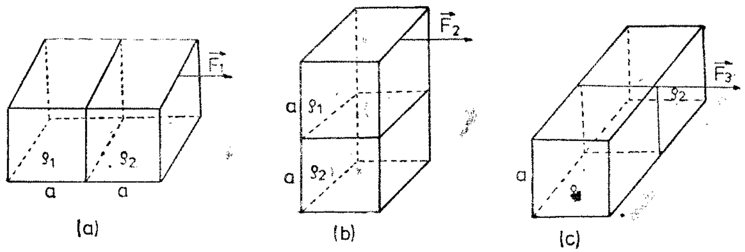

Fig. 1.230.

trebuie aplicată feţei superioare a prismei perpendiculară pe muchi ei şi lucrul mecanic necesar pentru a răsturna prisma. Se vor analiz cazurile din figura 1.230 a, b şi c.

1.231. Să se scrie condiţia de echilibru pentru bara omogen rezemată în punctele A şi C ca în figura 1.231. Pentru poziţi de echilibru să se determine reacţiunile din reazemele A şi C. Se cunosc lungimea barei l, lăţimea a şi forţele P şi Q.

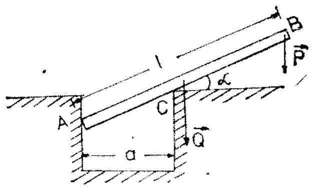

Fig. 1.231.

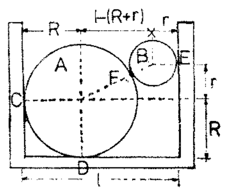

Fig. 1.232.

1.232. Doi cilindri A şi B sînt aşezaţi într-un şanţ (fig. 1.232). Cilindrul A are greutatea $G_A = 40$ kN şi raza $R = 80$ cm, iar cilindrul B are greutatea $G_B = 30$ kN şi raza $r = 50$ cm. Să se determine reacţiunea pereţilor verticali în punctele C şi E, a suprafeţei orizontale în D şi forţa de apăsare dintre cilindri dacă lăţimea şanţului este $l = 250$ m.

1.233. O scîndură orizontală AB cu lungimea $l = 4$ m şi greutatea $G = 100$ N este articulată în A şi legată cu ajutorul cablului DE (fig. 1.233), care face un unghi $\alpha = 45°$ cu orizontala. Punctul D se află la distanţa de 1 m de capătul B. Pentru a menţine scîndura în poziţie orizontală în punctul B acţionează o forţă $F = 200$ N, a cărei direcţie face un unghi $\beta = 60°$ cu orizontala. Să se calculeze reacţiunea din articulaţia A şi tensiunea din cablul DE.

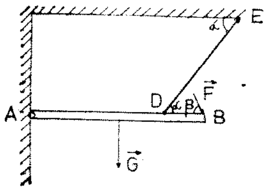

Fig. 1.233.

1.234. De capătul superior al unei bare verticale este prins un fir de lungime l la capătul căruia se află un corp de masă m. De acelaşi capăt al firului este prins un alt fir de aceeaşi lungime care are la celălalt capăt un alt corp de masă m. Să se arate că dacă bara se roteşte unghiul făcut de primul fir cu verticala este mai mic decît unghiul făcut de al doilea fir cu verticala.

1.235. Într-un autocamion cu greutatea G se află un corp cu greutatea $Q = G/2$ aşezat ca în figura 1.235. Să se calculeze forţele de apăsare ale roţilor pe şosea, dacă se neglijează forţele de frecare. În C se află centrul de greutate al camionului, iar dimensiunile sînt arătate în figura 1.235.

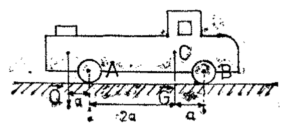

Fig. 1.235.

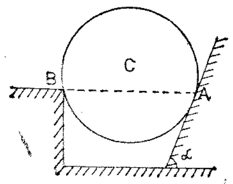

Fig. 1.236.

1.236. O sferă omogenă cu greutatea $G = 20$ N se sprijină în punctul A pe un plan înclinat care face un unghi $\alpha = 60°$ cu planul orizontal (fig. 1.236) şi în punctul B pe muchia unui paralelipiped. Punctele A şi B se află în acelaşi plan orizontal. Să se calculeze reacţiunile din punctele A şi B.

1.237. O baghetă omogenă cu greutatea G şi lungimea $2a$ se sprijină cu capătul A pe suprafaţa interioară a unui vas cu formă semisferică (fig. 1.237) de rază $r < a$. În punctul B bagheta se sprijină pe marginea vasului. În C se află centrul de greutate al baghetei,

iar în M centrul sferei. Să se calculeze valoarea unghiului form[ată] de baghetă cu planul orizontal în poziția de echilibru și reacțiuni[le] din punctele A și B.

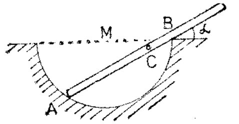

Fig. 1.237.

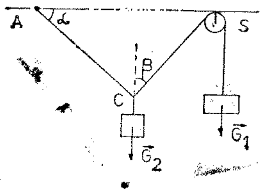

Fig. 1.238.

1.238. Un fir are un capăt fixat în A, este trecut peste scrip[e]tele S de mărime neglijabilă, iar de celălalt capăt este suspenda[tă] greutatea $G_1 = 10\sqrt{2}$ N. Dacă în punctul C se prinde greutat[ea] $G_2 = 19{,}32$ N poziția de echilibru se obține pentru $\alpha = 4$[5°] (fig. 1.238). Să se determine : a) valoarea unghiului β; b) tensiune[a] din porțiunea AC a firului; c) reacțiunea din scripetele S.

1.239. O plută cu masa M și lungimea l stă nemișcată pe o a[pă] liniștită. La capetele opuse ale plutei se află doi oameni cu mase[le] m_1 și m_2. Aceștia încep să se deplaseze unul spre altul. Să se determin[e] deplasarea plutei în momentul cînd omul cu masa m_1 a străbătu[t] toată pluta iar cel cu masa m_2 se află la jumătatea acesteia. Rezis[]tența apei este neglijabilă.

1.240. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg se află în repaus pe [o] masă orizontală. Un resort cu lungimea $l_0 = 0{,}1$ m și con[]stanta elastică $k = 10$ N/m are un capăt legat de corp, iar celălal[t] este fixat pe verticală. Inițial resortul este nedeformat. Dacă mas[a] este deplasată uniform resortul deviază cu unghiul $\alpha = 60°$ față d[e] verticală. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp [și] masă.

1.241. Să se determine poziția centrului de greutate al unui disc uniform de rază R în care este practicat un orificiu circular de rază r (fig. 1.241). Centrul orificiului circular se află la distanța $R/2$ de centrul discului.

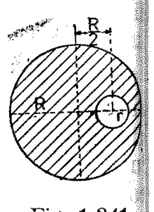

Fig. 1.241.

1.242. Să se determine poziția centrului de masă al unei plăci ce are forma unui semicerc cu raza R.

1.243. O cutie cu masa $m = 1000$ kg se află pe o suprafaț[ă] orizontală. Știind că forța minimă pentru a pune în mișcare cuti[a] este $F = 6000$ N să se determine coeficientul de frecare dint[re] cutie și suprafață.

1.244. Se dă o bară de lungime l și greutate G articulată în punctul A. Bara se sprijină în punctul C la $3/4\ l$ de A (fig. 1.244). De capătul B al barei este legat un fir ce trece după un scripete de masă neglijabilă și susține un corp de masă m. Firul face unghiul $\alpha = 30°$ cu orizontala. Știind că bara se află în echilibru se cere : a) reacțiunea din punctul C; b) unghiul maxim pe care firul ce susține corpul m îl poate face cu verticala pentru ca bara să rămînă pe reazemul C.

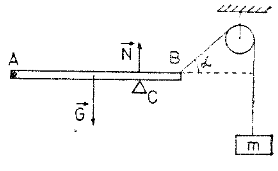

Fig. 1.244.

1.245. Trei bile elastice identice, aflate în contact una cu alta, sînt susținute de trei fire paralele. Una din bile este îndepărtată după o direcție perpendiculară pe axa ce unește centrele celorlalte două și apoi este lăsată liberă. Aceasta ciocnește simultan celelalte două bile în momentul ciocnirii avînd viteza v. Să se determine vitezele bilelor după ciocnire.

1.246. Sistemul din figura 1.246 se află în echilibru. Barele AD, BC, CJ, DI și OL sînt de două ori mai lungi decît barele AE, EB, JH și FO. Știind că $G_1 = 4$ N să se determine G_2.

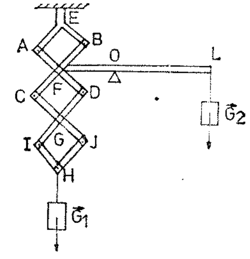

Fig. 1.246.

1.247. Capătul superior al unei scări se sprijină pe un perete vertical, iar capătul inferior pe o suprafață plană orizontală. a) Să se determine unghiul α dintre scară și perete în cazul echilibrului dacă între scară și suprafața orizontală coeficientul de frecare este μ; b) Considerînd că și între scară și perete există frecare, coeficientul fiind, de asemenea μ, să se determine noua valoare a lui α.

1.248. O bară omogenă de masă m este articulată la un capăt, iar celălalt capăt se sprijină pe un cărucior, ca în figura 1.248. Bara face un unghi α cu verticala. Coeficientul dintre bară și cărucior este μ, iar frecarea între roțile căruciorului și suprafața orizontală se neglijează. Să se determine forța necesară deplasării căruciorului spre stînga sau spre dreapta.

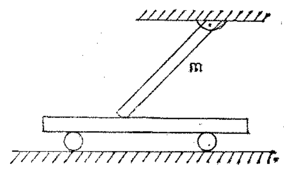

Fig. 1.248.

1.249. Trei cilindri din lemn se află în contact unul cu altul ca în figura 1.249. Cilindrii de jos sînt așezați pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare dintre cilindrii și suprafața orizontală

este acelaşi : μ. Să se determine valoarea minimă a coeficientului de frecare astfel ca cilindrii să rămînă nemişcaţi.

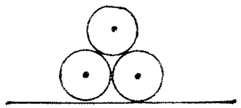

Fig. 1.249.

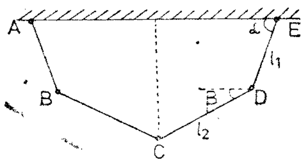

Fig. 1.250.

1.250. Patru bare omogene sînt legate între ele în punctele B, C şi D prin articulaţii (fig. 1.250). Cele două bare extreme AB şi DE se pot roti faţă de punctele fixe A şi E. Lungimile barelor sînt $AB = ED = l_1$ şi $BC = CD = l_2$. Masele barelor sînt aceleaşi: să se arate că unghiurile α şi β respectă, în poziţie de echilibru, relaţia $\operatorname{tg} \alpha = 3 \operatorname{tg} \beta$.

1.9. Mecanica fluidelor

• **1.251.** Să se determine densitatea unui corp care pătrunzînd în apă cu viteza $v_0 = 1$ m/s parcurge prin apă un drum $h = 1,2$ m în timpul $t = 0,5$ s.

• **1.252.** Un balon umplut cu aer pluteşte într-un amestec de bioxid de carbon şi aer. Volumul balonului este $V = 5$ l şi greutatea sa $G = 1,5 \cdot 10^{-2}$ N. În condiţii normale densitatea aerului este $\rho_1 = 1,29 \cdot 10^{-3}$ kg/l iar cea a bioxidului de carbon $\rho_2 = 1,98 \cdot 10^{-3}$ kg/l. Să se determine raportul volumelor bioxidului de carbon şi aerului din amestec astfel încît balonul să rămînă la acelaşi nivel.

1.253. Să se determine masa unui colac de salvare care poate să menţină la suprafaţa apei un om cu masa $m_1 = 60$ kg, în aşa fel încît capul şi umerii să rămînă în afara apei. În apă se află 7/8 din volumul omului. Densitatea corpului omenesc este $\rho_1 = 1,07$ g/cm³, densitatea apei $\rho_2 = 1$ g/cm³ şi densitatea colacului $\rho_3 = 0,2$ g/cm³.

• **1.254.** O sferă cu densitatea $\rho_c = 750$ kg/m³ este cufundată într-un lac sărat la adîncimea $h_1 = 20$ m de unde i se imprimă vertical, de jos în sus, o viteză $v_1 = 4$ m/s. Neglijînd frecarea cu apa şi aerul, să se calculeze : a) acceleraţia cu care se mişcă sfera dacă $\rho_{apă} = 1200$ kg/m³; b) timpul de urcare şi viteza sferei la suprafaţa apei; c) înălţimea maximă la care se ridică în aer; d) adîncimea la care pătrunde sfera din nou în apă; e) raportul V_1/V_2 al porţiunilor de sferă din aer şi apă, cînd sfera pluteşte la suprafaţa apei.

• **1.255.** Două corpuri identice cu densitatea $\rho_c = 7800$ kg/m³ sînt legate la capetele unui fir, unul se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$, celălalt este scufundat într-un fluid cu densitatea $\rho_l = 1000$ kg/m³. Cunoscînd coeficientul de frecare $\mu = 3/5$ şi $V = 1$ dm³ să se calculeze acceleraţia mişcării şi tensiunea din fir.

• **1.256.** De o plută cu volumul $V = 50$ m³ este agăţat un corp. Sistemul este scufundat în apă şi pluteşte cînd jumătate din volumul plutei rămîne deasupra apei. Să se calculeze : a) masa corpului; b) tensiunea din firul de care este legat corpul. Se cunosc $\rho_{plută} = 400$ kg/m³ şi $\rho_{corp} = 7900$ kg/m³.

• **1.257.** La cele două capete ale unui fir trecut peste un scripete fix se găsesc două dopuri de plută ($\rho = 700$ kg/m³) avînd masele $m_1 = 25$ g şi $m_2 = 50$ g. La momentul iniţial cele două dopuri se află la aceeaşi înălţime $h = 1$ m faţă de suprafaţa liberă a apei din vas. Să se calculeze : a) viteza celor două mase cînd m_2 atinge suprafaţa apei; b) adîncimea pînă la care pătrunde masa m_2 în apă; c) înălţimea maximă la care se ridică masa m_2 faţă de suprafaţa apei; d) timpul necesar masei m_2 să ajungă la înălţimea maximă, socotit de la începutul mişcării. Se cunosc $g = 10$ m/s² şi $\rho_{apă} = 10^3$ kg·m⁻³.

1.258. Un areometru este constituit dintr-un mic balon de sticlă care are volumul exterior V şi se continuă cu o tijă cilindrică divizată de lungime l şi secţiune S. Introducînd areometrul în apă distilată se constată că tija pătrunde pînă la diviziunea l_0. Cunoscînd densitatea apei ρ_0 să se determine valorile maxime şi minime ale densităţilor lichidelor ce se pot măsura cu acest areometru.

• **1.259.** Un corp cu densitatea $\rho = 600$ kg/m³ şi volumul $V = 0,01$ m³ este scufundat în apă la adîncimea $h = 3,26$ m şi lăsat liber. Să se calculeze : a) timpul în care corpul ajunge la suprafaţa apei; b) fracţiunea din volumul corpului rămas afară din apă în cazul plutirii; c) lucrul mecanic L efectuat iniţial pentru introducerea corpului în apă la adîncimea l.

• **1.260.** Un corp cu masa m are greutatea aparentă $G_1 = 9$ N cînd este cufundat într-un lichid cu densitatea $\rho_1 = 800$ kg/m³ şi acţionează asupra sa o forţă arhimedică $F_2 = 0,5$ N cînd este cufundat într-un fluid cu densitatea $\rho_2 = 400$ kg/m³. Să se calculeze : a) densitatea corpului; b) masa corpului; c) dacă acest corp se suspendă în aer de un fir cu secţiunea $S = 0,03$ mm² şi modul de elasticitate $E = 4 \cdot 10^{10}$ N/m² lungimea firului este $l = 1,5075$ m. Care este lungimea maximă a firului dacă i se imprimă corpului o mişcare de rotaţie într-un plan vertical cu viteza unghiulară $\omega = 3$ rad/s. Se va lua $g = 10$ m/s².

1.261. O bilă solidă omogenă de volum V și densitate ρ plutește la interfața a două lichide nemiscibile. Densitatea lichidului superior este ρ_1 și cea a lichidului inferior ρ_2 ($\rho_1 < \rho < \rho_2$) : a) Să se determine ce fracțiune din volumul bilei se va afla în lichidul superior și ce fracțiune în volumul inferior; b) Să se determine densitatea bilei în cazul cînd în vas se află ulei ($\rho_1 = 0,9$ kg/dm^3) și mercur ($\rho_2 = 13,6$ kg/dm^3) iar bila se află jumătate cufundată în mercur.

1.262. O presă hidraulică este acționată de un motor. Cunoscînd randamentul presei $\eta = 80\%$, raportul diametrelor pistoanelor $d_1/d_2 = 1/10$, greutatea ce trebuie ridicată $G = F_2 = 4 \cdot 10^5$ N și că pistonul mic coboară la fiecare apăsare cu $h_1 = 30$ cm, făcîndu-se $n = 100$ apăsări în timpul $t = 80$ s se cere : a) puterea consumată de motor; b) distanța H_2 pe care se deplasează pistonul mare; c) forța F_1 ce acționează asupra pistonului mic.

1.263. Un corp trebuie comprimat cu o forță $F_2 = 10^6$ N folosind o presă hidraulică la care raportul suprafețelor pistoanelor este $S_2/S_1 = 10$. Știind că puterea consumată este $P' = 3$ kW cu un randament $\eta = 80\%$ și că pistonul mic coboară cu $h_1 = 20$ cm la o singură apăsare, să se calculeze frecvența ν_1 a apăsărilor acestui piston.

1.264. Diametrele pistoanelor unei prese hidraulice sînt în raportul $d_2/d_1 = 10$, iar pistonul mic este acționat de o pîrghie la care unul din brațe este de 10 ori mai mare decît celălalt. La capătul brațului mare al pîrghiei acționează o forță $F = 400$ N. Cunoscînd randamentul presei $\eta = 80\%$, să se calculeze lucrul mecanic consumat L_1 pentru ridicarea pistonului mare cu $h_2 = 1$ m. Ce valoare are F_2?

1.265. În două vase cilindrice comunicante cu secțiuni diferite se toarnă mercur. Introducînd un corp din fier cu volumul V_0 în vasul cu secțiunea mai mare nivelul mercurului crește în ambele vase. Cunoscînd aria secțiunii vasului cu diametrul mai mic A_1, să se determine înălțimea coloanei de apă ce trebuie turnată în vasul cu diametrul mai mare pentru ca nivelul mercurului din vasul cu secțiunea mai mare să revină la poziția inițială. Densitatea apei este ρ_1, a mercurului ρ_2, iar cea a corpului ρ_0. Corpul plutește la suprafața de separare, fiind complet acoperit de apă.

1.266. Un vas are un orificiu la bază și se află pe un cărucior (fig. 1.266). Masa vasului și a căruciorului este M iar aria bazei vasului este A. (Dimensiunile vasului sînt date în figura 1.266). Să se determine forța F ce trebuie aplicată căruciorului astfel încît să rămînă în vas o cantitate maximă de apă.

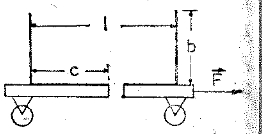

Fig. 1.266.

1.267. Un vas conic fără fund este așezat pe o masă. În vas se toarnă un lichid, astfel încît în momentul cînd se atinge nievlul h presiunea creată de lichid ridică vasul. Raza bazei mari a vasului este R, unghiul între generatoarele conului și verticală este α, iar greutatea vasului este G. Care este densitatea lichidului?

● **1.268.** Printr-o conductă orizontală circulă un gaz cu densitatea $\rho = 1,6$ kg/m^3. Manometrele 1 și 2 (fig. 1.268) indică presiunile $p_1 = 2$ atm. și $p_2 = 2,5$ atm. Cunoscînd secțiunea conductei $S = 0,25$ m^2, să se calculeze : a) viteza gazului prin conductă; b) debitul de volum al gazului prin conductă.

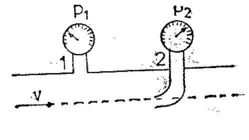

Fig. 1.268.

● **1.269.** O pîlnie are diametrul superior $D = 18$ cm iar diametrul inferior $d = 4,5$ cm și înălțimea totală $h = 40$ cm. Neglijînd frecările să se calculeze : a) viteza v de scurgere a lichidului din pîlnie; b) debitul de volum care se scurge din pîlnie.

1.270. Dintr-un vas cu apă al cărui nivel este menținut constant la înălțimea h, curge apă prin două orificii dispuse pe aceeași generatoare la distanța a unul de altul. Să se calculeze : a) la ce distanță x față de suprafața apei se află orificiul superior, dacă cele două jeturi cad în același punct din planul orizontal ce cuprinde baza vasului;) b) dacă secțiunile deschiderilor sînt s_1 și s_2, care sînt debitele de volum Q_1 și Q_2 corespunzătoare; c) ce forțe F_1 și F_2 trebuie exercitate asupra unor dopuri pentru a opri curgerea lichidului din rezervor.

● **1.271.** Un manometru diferențial, care indică diferența între presiunile din racordurile r_1 și r_2 este montat pe o porțiune de conductă prin care circulă petrol (fig. 1. 271). Se cere să se determine debitul prin conductă, dacă se dau : $p_1 - p_2 = 25 \cdot 10^{-2}$ MN/m^2, $S_1 = 0,5$ m^2, $S_2 = 0,4$ m^2, $\rho_{petrol} = 900$ kg/m^3.

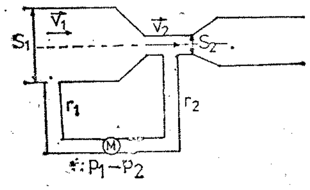

Fig. 1.271.

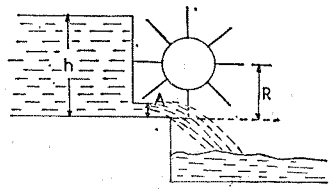

Fig. 1.272.

1.272. O roată cu palete este acționată de un curent obținut prin curgerea apei dintr-un rezervor (fig. 1.272). Înălțimea coloanei de apă este h, distanța de la centrul roții la vîrful paletei este R, viteza unghiulară a roții ω, iar aria sec-

țiunii transversale a curentului este A. Să se determine forța ca acționează asupra paletelor dacă după interacție curentul contin să se miște cu viteza paletelor.

1.273. În dispozitivul din figura 1.273, prin conducta AB avîn secțiunile $S_A = 2$ cm și $S_B = 0{,}5$ cm circulă aer cu densitat $\rho_{aer} = 1{,}3$ kg/m³, cu debitul volumic $D = 150$ l/min. În tubul se află apă. Să se calculeze diferența de nivel h a apei între ce două ramuri ($\rho_{apă} = 10^3$kg/m³).

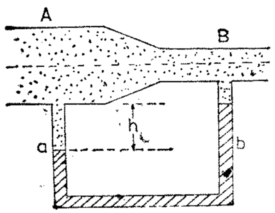

Fig. 1.273.

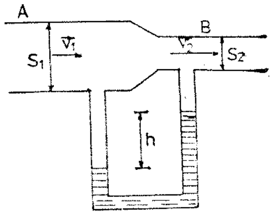

Fig. 1.274.

1.274. În dispozitivul din figura 1.274 prin conducta AB d secțiuni $S_1 = 2$ dm² și $S_2 = 0{,}5$ dm² circulă petrol cu densitat $\rho_p = 800$ kg/m³. Cunoscînd și densitatea mercurului $\rho_{Hg} = 13600$ kg/m și denivelarea $h = 15$ cm, să se calculeze: a) vitezele v_1 și ale petrolului prin secțiunile S_1 și S_2; b) debitul de volum a conductei.

1.275. O seringă are lungimea cilindrului $l = 4$ cm, secțiune $S = 1{,}2$ cm² și secțiunea orificiului $S_1 = 1$ mm². În cît timp se v goli complet seringa dacă fiind umplută cu apă se acționează asupr pistonului cu o forță constantă $F = 5$ N?

1.276. Într-un vas adînc curge apă printr-un tub cu debit volumic $D = 15$ cm³/s. Vasul are secțiunea $S_1 = 10$ cm². La baz vasului este practicat un orificiu cu secțiunea $S_2 = 0{,}5$ cm². C nivel maxim h poate atinge apa din vas?

1.277. Un motor electric cu randamentul $\eta_1 = 90\%$ acțio nează o pompă cu randamentul $\eta_2 = 60\%$ ce ridică apă cu $\rho = 10^3$kg/m³ la înălțimea $h = 20$ m printr-o conductă cu diametr $d = 0{,}2$ m. Cunoscînd debitul de masă $D_m = 2$ kg/s se cere: a) debitul de volum D_V și viteza v a lichidului în conductă; b) putere primită de la rețea și randamentul total al instalației.

1.278. Un parașutist cu masa $m = 80$ kg, execută un salt d la mare înălțime cu viteză inițială nulă. Considerînd că forța de rezistență a aerului este proporțională cu viteza, coeficientul de rezistență fiind $k = 10$ kg/s, să se determine: a) viteza limită atinsă de parașutist; b) intervalul de timp τ după care viteza parașutistului va fi egală cu viteza limită.

1.279. O pompă este alcătuită dintr-un cilindru orizontal în care se află un piston care are aceeași secțiune transversală A ca și a cilindrului. La capătul cilindrului este practicat un orificiu de arie a în jurul axei. a) Să se determine viteza de curgere a lichidului din pompă dacă pistonul se deplasează cu viteză constantă sub acțiunea unei forțe F. Densitatea lichidului este ρ; b) Să se explice de ce viteza de curgere a lichidului poate deveni infinit de mare chiar în cazul unei forțe F de valoare mică, dacă $a \to A$.

1.280. Un vas cilindric este plin cu un lichid cu densitatea ρ. În partea de sus vasul este închis cu un capac de rază R. În partea de jos vasul are un orificiu de arie S, închis cu un dop de masă m (fig. 1.280). Pentru a scoate dopul cînd cilindrul este în repaus este necesară o forță f. Să se calculeze viteza unghiulară maximă cu care poate fi rotit vasul în jurul axei sale verticale pentru ca dopul să nu zboare din cilindru.

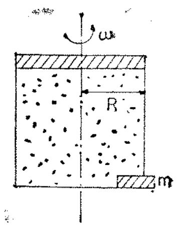

Fig. 1.280.

1.281. Un vas cilindric cu înălțimea $h = 1$ m și aria bazei $S_1 = 10^{-2}$m² este plin cu apă. Pe fundul vasului se află un orificiu cu aria secțiunii $S_2 = 10^{-4}$ m². Să se calculeze: a) viteza de coborîre a nivelului apei; b) timpul necesar pentru golirea unei treimi din înălțimea vasului; c) timpul necesar pentru golirea completă a vasului.

1.282. Într-un vas cilindric se află un lichid ideal, în repaus. Dîndu-se vasului o mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară constantă ω, în jurul axei sale verticale, să se determine forma suprafeței libere a lichidului.

1.283. Un ceas cu apă (clepsidră) folosit în Grecia antică este alcătuit ca în figura 1.283. Apa din vasul superior se scurge prin orificiul O în vasul inferior. Să se determine care trebuie să fie forma vasului pentru ca scara timpului să fie uniformă.

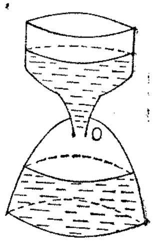

Fig. 1.283.

1.10. Oscilații și unde elastice

1.284. Să se calculeze amplitudinea oscilațiilor armonice ale unui punct material știind că energia sa totală este egală cu 40 mJ și forța care acționează asupra oscilatorului la o distanță egală cu jumătate din amplitudine este egală cu 2N.

1.285. Să se calculeze masa unui oscilator armonic cu amplitudinea $A = 0{,}1$ m, frecvenţa $\nu = 2s^{-1}$ şi faza iniţială $\varphi_0 = 30°$ dacă energia totală a acestuia este 7,7 mJ. După cîte secunde de la începutul mişcării energia este egală cu energia potenţială?

1.286. Un punct material efectuează oscilaţii armonice de-a lungul axei Ox după legea $x = A \sin \omega t$. Să se găsească amplitudinea A şi perioada T ale mişcării, dacă pentru $x = x_1$, $v = v_1$ şi pentru $x = x_2$, $v = v_2$.

1.287. Un punct material efectuează oscilaţii armonice cu pulsaţia ω. Să se calculeze amplitudinea şi faza iniţială ştiind că la $t = 0$, $x = x_0$ şi $v = v_0$.

1.288. Un punct material efectuează oscilaţii armonice. Perioada oscilaţiilor este $2s$, amplitudinea 50 mm şi faza iniţială este zero. Să se determine viteza punctului la momentul cînd elongaţia sa este 25 mm.

1.289. Un corp cu masa $m = 100$ g este atîrnat la capătul unui resort pe care-l va alungi cu $\Delta l = 1$ cm. Din poziţia realizată se trage corpul pînă la distanţa $A = 15$ cm. Se cere: a) ecuaţia de mişcare a corpului; b) energia cinetică şi potenţială în punctul $y_1 = 6$ cm; c) timpul necesar ca oscilatorul să parcurgă distanţa dintre $y_1 = 6$ cm şi $y_2 = 10$ cm; d) lucrul mecanic efectuat de forţa elastică a resortului între $y_1 = 6$ cm şi $y_2 = 10$ cm.

1.290. De un resort cu lungimea iniţială $l_0 = 1$m şi constanta elastică $k = 1000$ N/m se atîrnă un corp cu masa $m_1 = 2$ kg. De la distanţa $H = 2$ m sub punctul de suspensie se aruncă vertical în sus un corp cu masa $m_2 = 1$ kg cu viteza iniţială $v_{02} = 6$ m/s. Corpul m_2 va ciocni central, perfect elastic corpul m_1, imprimîndu-i o mişcare oscilatorie armonică pe verticală. Să se calculeze: a) lungimea l a resortului după suspendarea lui m_1; b) perioada de oscilaţie şi pulsaţia mişcării; c) viteza v_1' a corpului de masă m_1 după ciocnire; d) ecuaţia de mişcare a corpului de masă m_1 (se neglijează influenţa cîmpului gravitaţional).

1.291. Un corp cu masa $m = 10$ g ce efectuează o mişcare oscilatorie armonică are la un moment dat $y_1 = 0{,}1$ m, $v_1 = 0{,}2$ m/s şi $a_1 = 0{,}8$ m/s². Ştiind că la momentul iniţial $t = 0$, $y = A\sqrt{3}/2$ se cere: a) ecuaţia mişcării oscilatorii armonice; b) viteza maximă, acceleraţia maximă şi forţa maximă; c) punctul în care energia cinetică este egală cu energia potenţială.

1.292. Două particule cu masele $3M/4$ şi M sînt legate printr-un resort cu lungimea netensionată L şi constanta elastică k. Masele se află în repaus la momentul iniţial şi sînt aşezate pe o masă orizontală fără frecare. O altă particulă cu masa $M/4$ care se deplasează cu viteza v de-a lungul liniei ce uneşte cele două mase legate, se ciocneşte plastic de particula cu masa $3M/4$. Să se afle amplitudinea şi perioada de oscilaţie a sistemului (a centrului de masă).

1.293. Un corp cu masa $m = 10$ kg este legat de două resorturi identice, fiecare avînd constanta de elasticitate $k = 2000$ N/m (fig. 1.293). Se deplasează corpul cu distanţa $A = 8$ cm faţă de poziţia de echilibru şi i se dă drumul. Considerînd ca origine a timpului momentul cînd i se dă drumul şi ca origine a coordonatelor poziţia de echilibru neglijînd frecările, să se calculeze: a) ecuaţia de mişcare a corpului; b) viteza şi acceleraţia maximă a corpului; c) energia cinetică şi potenţială în punctul $y = 4$ cm; d) dacă mişcarea s-ar efectua cu frecare ($\mu = 0{,}2$) ce spaţiu total s-ar parcurge pînă la încetarea mişcării.

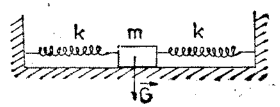

Fig. 1.293.

1.294. Un corp avînd masa $m = 2$ g oscilează în jurul poziţiei sale de echilibru sub acţiunea forţei elastice $F = 2 \cdot 10^{-4} \sin\left(\pi t - \dfrac{\pi}{4}\right)$ N. Să se calculeze: viteza maximă a oscilatorului; b) lucrul mecanic necesar pentru a deplasa punctul material din poziţia de echilibru în poziţia de elongaţie maximă; c) timpul necesar punctului material pentru a parcurge distanţa de la $A/2$ la A, unde A este amplitudinea. Se va lua $\pi^2 = 10$.

1.295. Un corp de masă $m = 5$ g efectuează oscilaţii armonice cu perioada $T = 2$s. Amplitudinea oscilaţiei este $A = 3$ cm. Să se determine: a) viteza v a corpului în momentul cînd acesta se află la distanţa $x = 1{,}5$ cm faţă de poziţia de echilibru; b) forţa maximă F_{max} care acţionează asupra corpului; c) energia totală a corpului care oscilează.

1.296. Cu ce frecvenţă va oscila o sferă mică aşezată între două planuri înclinate cu vîrfurile adiacente, unghiul dintre planuri fiind $\alpha = 120°$, iar unul din planuri făcînd cu orizontala unghiul $\beta = 30°$? Sfera este lăsată să alunece fără frecare pe unul din planuri de la înălţimea $h = 20$ cm.

1.297. Un resort de lungime $l = 0{,}4$ m susţine la un capăt un platan de masă neglijabilă, iar celălalt capăt este fixat în punctul P (fig. 1.297). Dacă pe platan se aşază un corp cu greutatea $G = 2$N resortul se alungeşte cu $\Delta l = 4$ cm. Lăsînd corpul să cadă liber din punctul P se cere să se determine: a) perioada de oscilaţie a

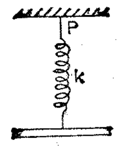

Fig. 1.297.

corpului; b) legea de mişcare a corpului; c) forţa de întindere di resort. $g = 9{,}8\ m/s^2$.

• **1.298.** Un sistem mecanic este alcătuit dintr-un corp de ma m legat de un fir care după ce este trecut peste un scripete cu ma M este prins de un resort cu constanta k (fig. 1.298). Considerînd c scripetele are forma unui disc să se determine perioada de oscilaţi a corpului.

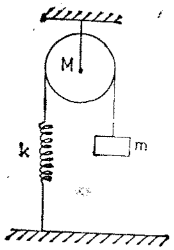

Fig. 1.298.

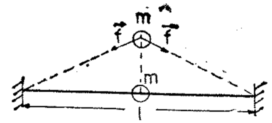

Fig . 1.299.

• **1.299.** Un fir fixat la ambele capete are la mijlocul său o bilă găurită de masă m (fig. 1.299). Considerînd firul fără masă şi neglijînd gravitaţia să se determine perioada oscilaţiilor mici ($\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi \simeq \varphi$) ce apar dacă iniţial firul este întins astfel încît în el apare tensiunea f.

• **1.300.** O bară de greutate neglijabilă şi de lungime l este fixată în centrul unui scripete fără masă cu raza $r = 0{,}2$ m (fig. 1.300). La capătul barei se află fixat un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg. Peste scripete este trecut un fir de al cărui capăt este susţinut un corp de masă $M = 1$ kg. La momentul iniţial bara se află în poziţie verticală. a) Să se determine condiţia de oscilaţie a sistemului; b) Să se calculeze lungimea barei în cazul sistemului considerat dacă unghiul maxim de înclinare este $\alpha = 90°$.

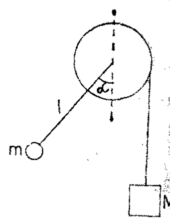

Fig. 1.300.

1.301. Un resort liniar are lungimea l_0 cînd este liber. Dacă se atîrnă de el o masă m, lungimea sa devine $l_0 + A$. Resortul şi masa m aflîndu-se în această poziţie, cade o a doua masă m de la înălţimea A peste prima, cu care se ciocneşte plastic. Să se calculeze: a) perioada, b) amplitudinea; c) înălţimea maximă, deasupra poziţiei iniţiale de echilibru, atinsă în mişcare.

• **1.302.** Un oscilator armonic respectă legea $x = 6 \sin 2t + 2\sqrt{3} \cdot \cos 2t$ (cm). Să se calculeze amplitudinea, viteza maximă şi faza iniţială a mişcării.

1.303. Un punct material efectuează simultan două oscilaţii armonice de pulsaţii ω şi 2ω, după două direcţii perpendiculare $x = a \cos \omega t$; $y = b \cos 2\omega t$. Să se calculeze: a) ecuaţia mişcării rezultante; b) viteza punctului material; c) acceleraţia.

1.304. Un corp execută o mişcare descrisă de ecuaţia $x = 3 \sin 2\pi t - 4 \cos 2\pi t$ (cm). Să se calculeze amplitudinea, faza iniţială, perioada şi acceleraţia mişcării corpului.

• **1.305.** Un corp execută o mişcare descrisă de ecuaţia $x = 2 \sin^2\left(3\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Să se arate că mişcarea este o oscilaţie armonică şi să se calculeze amplitudinea, perioada, faza iniţială şi viteza mişcării.

1.306. Să se găsească traiectoria mişcării unui punct material care efectuează simultan următoarele oscilaţii: $x = 2 \sin \pi(2t + 1)$ (cm), $y = 2 \sin(2\pi t + 90°)$ (cm).

1.307. Un resort cu constanta elastică $k_1 = 40\ N \cdot m^{-1}$ este aşezat vertical, avînd un capăt fixat pe un suport orizontal, iar celălalt capăt acţionează un scripete mobil cu greutatea $G = 10$ N (fig. 1.307). Scripetele mobil este prevăzut la partea superioară cu un orificiu vertical, şi este legat de capătul resortului cu constanta elastică $k_2 = 200\ N \cdot m^{-1}$. Iniţial cele două resorturi se află în poziţie nedeformată, iar scripetele mobil se sprijină pe un inel. Un corp cu greutatea $G_c = 10$ N, care poate pătrunde în orificiul scripetelui mobil se află la înălţimea $h = 5{,}1$ m, deasupra acestuia şi este lăsat liber. După ciocnirea corpului cu scripetele mobil, inelul se rupe, iar sistemul scripete-corp are o viteză $v_f = 4$ m/s. Se cere să se calculeze: a) energia eliberată sub formă de căldură în cursul ciocnirii plastice dintre corp şi scripetele mobil; b) Energia cheltuită pentru ruperea inelului; c) perioada oscilaţiilor sistemului; d) distanţa x_e a noii poziţii de echilibru faţă de poziţia iniţială; e) distanţele x_{max} şi x'_{max} faţă de poziţia iniţială pînă la care poate coborî şi respectiv urca scripetele mobil; f) viteza maximă atinsă de scripetele mobil în timpul mişcării.

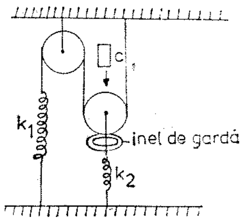

Fig. 1.307.

• **1.308.** Să se calculeze viteza de propagare a sunetului prin aer ştiind că are lungimea de undă $\lambda = 1$ m şi frecvenţa de oscilaţie, $\nu = 343$ Hz. Care este valoarea vitezei maxime de oscilaţie a particulelor de aer dacă amplitudinea lor de oscilaţie este de 0,2 mm?

1.309. O barcă cu motor, ce se găsește pe un lac în punctul A la distanța R de malul lacului (fig. 1.309), pornește cu viteza $v = 18$ km/h și descrie un cerc de rază $r = R/2$. La momentul inițial viteza bărcii este orientată perpendicular pe malul lacului. Undele produse de barcă pe suprafața apei ajung la mal după un timp $t=3$ minute de la începerea mișcării. Viteza de propagare a undelor produse de barcă pe suprafața apei este egală cu $u = 9$ km/h. Să se calculeze distanța R.

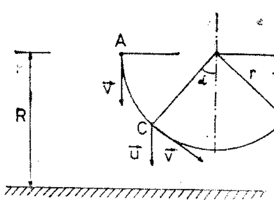

Fig. 1.309.

1.310. Două corpuri cu masele m_1 și m_2 se pot deplasa fără frecare pe o tijă orizontală. Corpurile sînt legate între ele printr-un arc cu constanta elastică k (fig. 1.310). Inițial resortul este comprimat prin deplasarea corpurilor unul spre celălalt după care sistemul se lasă liber. Să se determine: a) deplasarea centrului de masă; b) perioada de oscilație a sistemului; c) valoarea vitezei relative maxime a corpurilor dacă deplasarea inițială relativă a corpurilor este a; d) viteza centrului de masă dacă se fixează corpul de masă m_1, se comprimă resortul prin deplasarea corpului de masă m_2 după care este lăsat liber.

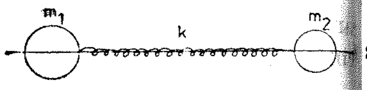

Fig. 1.310

• **1.311.** Un oscilator liniar avînd amplitudinea $A = 2$ mm, se află după $t = 10^{-1}$ s de la începerea oscilației la distanța $y = 1$ mm față de poziția de echilibru. Masa oscilatorului este $m = 1$ g, iar energia sa maximă $E_t = 5 \cdot 10^{-7}$ J. a) Să se scrie ecuația de mișcare a oscilatorului; b) Să se calculeze lungimea de undă a undelor elastice longitudinale rezultate prin propagarea acestor oscilații știind că la $x = 10$ m față de sursă faza oscilației este $\varphi = \pi/2$; c) Să se calculeze modulul de elasticitate al mediului dacă densitatea sa este $\rho = 1,3$ kg/m^3.

•**1.312.** Un punct dintr-un mediu avînd modulul de elasticitate $E = 7,92 \cdot 10^4$ N/m^2 și densitatea $\rho = 2,2 \cdot 10^3$kg/m^3 este supus simultan oscilațiilor descrise de ecuațiile $y_1 = \sin 2\pi(300t - 5)$ (mm) și $y_2 = 2 \sin 2\pi(300t - 4,5)$ (mm). a) Să se arate dacă în acest punct se obține un maxim sau un minim de interferență; b) Să se calculeze amplitudinea și faza oscilației rezultante; c) Să se calculeze lungimea de undă a oscilațiilor longitudinale care interferă.

1.313. Printr-o bară de aluminiu cu densitatea $\rho = 2700$ kg/m^3 și modulul de elasticitate $E = 6,75 \cdot 10^{10}$N/m^2 se propagă unde longitudinale. Sursa de oscilații este așezată pe bară și emite oscilații avînd ecuația $y = 10^{-2} \sin 1570t$. Ecuațiile oscilațiilor care ajung la capetele barei sînt $y_A = 10^{-2} \sin \left(1570\,t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ și $y_B = 10^{-2} \sin \left(1570\,t - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze: a) viteza maximă de oscilație; b) viteza undei; c) lungimea barei.

1.314. O sursă de oscilații aflată într-un mediu elastic emite unde plane descrise de ecuația: $y = 0,25 \sin 100\,\pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor longitudinale ce se propagă este $\lambda = 10$ m. Să se calculeze: a) timpul după care începe să oscileze un punct aflat la distanța $x = 8$ m de sursă; b) distanța dintre două puncte între care este un defazaj de $\pi/6$; c) defazajul dintre două puncte aflate la distanța $\lambda/3$ unul de altul?

1.315. Un oscilator liniar este scos din poziția de echilibru sub acțiunea unei forțe elastice $\mathbf{F} = 6,8 \cdot 10^5$N, pînă la o distanță $\mathbf{d} = 0,17$ m. Oscilațiile elastice se propagă sub forma unor unde elastice plane și se reflectă de un perete, formînd unde staționare. Peretele este plasat la distanța $\mathrm{D} = 16,55$ m măsurată din punctul de echilibru al oscilatorului. Se cere să se determine: a) Mărimile care caracterizează mișcarea oscilatorie; b) Ecuația mișcării oscilatorii; c) Energia cinetică maximă a oscilatorului; d) Numărul de ventre și noduri formate pe distanța D, știind că unda incidentă străbate această distanță în timpul $\mathrm{t} = 0,05$ s. Se va considera $m = 1$ kg.

1.316. Printr-un mediu elastic se propagă o undă longitudinală a cărei ecuație la distanța $x = 5$ m de sursă este $y = 2 \sin 2\pi(500t - 0,5)$ (mm). Știind că modulul de elasticitate al mediului este $E = 6,75 \cdot 10^{10}$N$\cdot$m^{-2} să se calculeze: a) frecvența și lungimea de undă a undei; b) densitatea mediului; c) distanța față de sursă la care ecuația undei este $y = 2 \sin(1000\,\pi t - \pi/5)$ (mm).

•**1.317.** Ecuația unei unde elastice plane este de forma: $y = 0,6 \sin(1800t - 5,3x)$ (mm) unde t este exprimat în secunde iar x în metri. Să se determine: a) raportul dintre lungimea de undă și amplitudinea de oscilație a particulelor; b) raportul dintre viteza de propagare a undei și viteza maximă de oscilație a particulelor; c) deformația relativă $\left(\varepsilon = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ maximă a mediului și legătura sa cu viteza de oscilație maximă a particulelor.

•**1.318.** Se consideră un mediu elastic ce are $E = 4,3 \cdot 10^{10}$ N/m^2 și $\rho = 2,7 \cdot 10^3$ kg/cm^3, în care se propagă unde longitudinale cu frecvența $\nu = 500$ Hz și $A = 0,025$ m. Se cere: a) ecuația undei; b) diferența de fază corespunzătoare a două particule aflate la dis-

tanța $\Delta x = 200$ m una de alta, pe direcția de propagare; c) dif-
rența de fază corespunzătoare la două poziții ocupate de acee-
particulă la intervalul de timp $\Delta t = 5$ s; d) peste unda respecti-
se suprapune o altă undă elastică de aceeași amplitudine și fre-
vență, dar defazată cu $\varphi = \pi/3$. Să se scrie ecuația undei rezultan-

1.319. Două unde armonice plane se propagă în aceeași direc-
avînd vitezele v_1 și v_2, iar lungimile de undă λ_1 și λ_2. Să se calculeze
a) distanța dintre două puncte vecine în care oscilațiile corespun-
toare fiecărei unde se află în fază; b) care este viteza de deplasa-
a unui astfel de punct.

1.320. O coardă MN de lungime $l = 10$ m este fixată la ca-
tul N. Capătul M oscilează transversal cu amplitudinea $A = 10$ cm
cu frecvența $\nu = 450$ Hz. Cunoscînd viteza de propagare a undei
coardă, $v = 450$ m/s, să se calculeze: a) ecuația de oscilație a un
punct P de pe coardă situat la distanța $x = 1{,}25$ m față de capăt
N; b) pozițiile ventrelor și nodurilor pe coardă.

1.321. Două surse de unde plane emit unde de aceeași amp-
tudine $A = 1$ cm, aceeași frecvență $\nu = 100$ Hz și $\lambda = 1{,}2$ m. Distan
dintre surse este $d = 30$ cm. Presupunînd fazele oscilațiilor nule
se calculeze: a) ecuația de oscilație a unui punct M situat între ce
două surse aflate la distanța $l_1 = 5$ cm de prima sursă și $l_2 = 25$ c
de a doua sursă; b) ecuația de oscilație a unui punct N aflat l
distanța $l = 1{,}2$ m de cea de a doua sursă în exterior; c) vite
de propagare a undelor.

1.322. O sursă de oscilații cu frecvența ν, vibrează la capătul de
chis al unui tub de lungime l, care este închis la celălalt capăt. Cunoscîn
amplitudinea oscilației A, să se calculeze: a) distanțele x_v și x_n fa
de capătul deschis la care se formează ventre și noduri, prin supr-
punerea undelor incidente și reflectate; b) valoarea maximă
minimă a amplitudinii rezultante.

1.323. Două surse punctiforme s_1 și s_2 efectuează oscilații
date de relațiile: $y_1 = 2\sin 100\,\pi t$ (cm); $y_2 = 4\sin\left(100\,\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ (cm
Sursele produc oscilații transversale ce se propagă cu viteza $v =$
$= 340$ m/s. Să se calculeze: a) diferența de fază dintre fazele undel
ce sosesc în același moment într-un punct situat la d_1 de sursa
și la distanța d_2 de sursa s_2; b) valoarea lui $\Delta d = d_2 - d_1$, pentr
care diferența de fază este nulă; c) amplitudinea undei rezultant
într-un punct pentru care $\Delta d = 23{,}8/3$ m.

1.324. Se suprapun două unde plane descrise de ecuațiile
$y_1 = 3\sin 10\pi t$ (cm); $y_2 = 5\sin 10\pi t$ (cm). Să se calculeze: a) am-

plitudinea undei rezultante într-un punct în care diferența de drum
a celor două unde este $d = 10$ m. Vitezele de propagare ale celor
două unde sînt egale și au valoarea $v = 20$ m/s; b) pentru ce valori
ale diferenței de drum se obține amplitudinea rezultantă maximă
sau minimă; c) la ce distanță x față de prima sursă, ecuația primei
unde este: $y_1 = 3\sin\left(10\,\pi t - \dfrac{\pi}{6}\right)$?

1.325. Să se determine frecvențele proprii ale unei coloane de
aer aflată într-un tub de lungime $l = 3{,}4$ m, închis la ambele capete.
Se cunoaște viteza de propagare a sunetului în aer $c = 340$ m/s.

1.326. În două puncte S_1 și S_2 situate pe suprafața apei la
distanța l unul de altul se produc două mișcări oscilatorii armonice
defazate cu φ_0, cu frecvența ν și amplitudinea A. Din cele două puncte
se propagă pe suprafața apei, în toate direcțiile unde transversale cu
lungimea de undă λ. a) Să se calculeze elongația mișcării oscila-
torii pe care o efectuează un punct M situat la distanța r_1 de S_1
și r_2 față de S_2: b) Să se determine pozițiile nodurilor și ventrelor
pe dreapta care unește punctele S_1 și S_2; c) Să se precizeze punctele
situate pe mediatoarea segmentului S_1S_2 care oscilează în fază cu
punctul O situat la mijlocul acestui segment.

1.327. Un fir de bumbac cu lungimea
de 2 m și masa 0,45 g este fixat cu o
extremitate de brațul unui diapazon și
cu cealaltă de un corp cu masa $m_1 = 200$ g
(fig. 1.327). Știind că lungimea părții ori-
zontale a firului este de 2 m și că prezintă
aspectul unui singur fus să se determine:

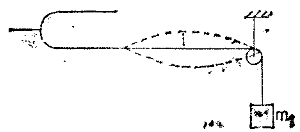

Fig. 1.327.

a) Frecvența vibrațiilor produse de diapazon; b) Greutatea pe care
ar trebui să o aibă corpul suspendat de fir pentru ca firul ori-
zontal să formeze două fuse consecutive.

1.328. O lamă vibrantă cu frecvența de 100 Hz emite pe supra-
fața unui lichid unde circulare sinusoidale. Distanța dintre două
creste succesive este de 8 mm. Diferența de nivel dintre o creastă
și o vale este mare în apropierea imediată a sursei și numai de 1 mm
la 50 cm de aceasta. Lama începe să vibreze la momentul $t = 0$.
Să se calculeze: a) viteza de propagare a undei; b) elongația unui
punct situat la 12,5 cm de sursă la momentele $t_1 = 0{,}45$ s, $t_2 =$
$= 0{,}65$ s; c) Amplitudinea și energia de vibrație a unei bucăți de
plută cu masa $m = 0{,}1$ g aflată la distanța de 40 cm de sursă. Pier-
derile prin frecări se consideră neglijabile.

1.329. O coardă de argint ($\rho = 10,5 \cdot 10^3$ kg/m³) cu lungim
$l = 2$ m şi diametrul $d = 2 \cdot 10^{-3}$ m este fixată la un capăt iar
celălalt capăt este pusă în vibraţie cu frecvenţa $\nu = 450$ Hz.
ce tensiune apar unde staţionare cu un ventru la capătul pus în vib
ţie şi cu cinci noduri intermediare?

1.330. Într-un dispozitiv Kundt (fig. 1.330) vergeaua de fier are lungimea $L = 0,5$ m. Aceasta este fixată la mijloc şi are un capăt prins în dopul care închide tubul de sticlă

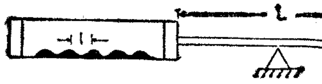

Fig. 1.330.

în aşa fel încît poate oscila. În tubul de sticlă închis la ambele cap
se află rumeguş. Sub acţiunea oscilaţiilor produse în vergeaua
fier rumeguşul se aşează sub forma unor maxime şi minime alte
nate. Distanţa dintre două maxime este $l = 3$ cm. Să se calcule
viteza undelor elastice prin fier, ştiind că în aer viteza este v_a
$= 340$ m/s.

REZOLVĂRI

1.1. Cinematica mişcării rectilinii uniforme

1.1. Viteza medie este dată de relaţia : $v_m = \dfrac{\Delta r_1 + \Delta r_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$.

Notînd $\Delta r_1 = \Delta r_2 = l$ şi $\Delta t_1 = \dfrac{l}{v_1}$ şi $\Delta t_2 = \dfrac{l}{v_2}$ se obţine :

$$v_m = \frac{2l}{l/v_1 + l/v_2} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} = 48 \text{ km/h}.$$

1.2. Notînd cu $\Delta\vec{r}_1$ şi $\Delta\vec{r}_2$ spaţiile străbătute în cele două etape ale mişcării viteza medie este

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}_2}{2 \cdot \dfrac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

Proiectînd această relaţie pe axele Ox şi Oy se obţine :

$$v_{mx} = (v_1 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\alpha_2)/2 = -5 \text{ m/s};$$

$$v_{my} = (v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2)/2 = 15\sqrt{3} \text{ m/s}$$

şi deci $\qquad v_m = \sqrt{v_{mx}^2 + v_{my}^2} = 26,46$ m/s.

1.3. $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, de unde rezultă $v_{1,2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$.
La momentul t distanţa dintre bărci va fi

$$r = v_{1,2} \cdot t = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}$$

1.4. $t = \dfrac{l}{(v_1 + v_2)} = 5s.$

1.5. În timpul Δt rigla CD parcurge distanța $v_2\Delta t$, iar rigla AB parcurge distanța $v_1\Delta t$ (fig. 1.5.R). În același interval de timp punctul de intersecție O se va deplasa pînă în O'. Din triunghiul OEO' rezultă

$$OO' = \sqrt{OE^2+EO'^2+2OE\cdot EO'\cos\alpha}.$$

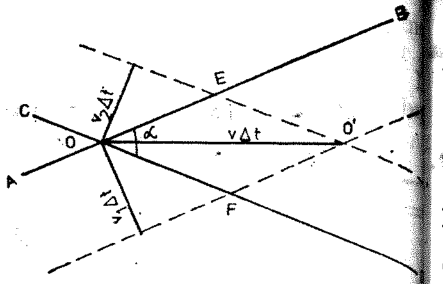

Fig. 1.5.R.

Înlocuind $OO' = v\,\Delta t$; $OE = \dfrac{v_2\,\Delta t}{\sin\alpha}$; $O'E = OF = \dfrac{v_1\,\Delta t}{\sin\alpha}$, rezultă
$v = \sqrt{v_1^2+v_2^2+2v_1v_2\cos\alpha}/\sin\alpha$.

1.6. Suprafața △ OAB este egală numeric cu drumul parcu[rs] de primul corp în intervalul T:
OB·AB/2 = $(T^2 \operatorname{tg}\alpha)/2$, iar suprafața △ O_1CB este egală nu-meric cu drumul parcurs de al doilea corp pînă la întîlnire $O_1B\cdot CB/2 = (T-t_1)^2 \operatorname{tg}\beta)/2$. Din egalarea celor două spații $T^2\operatorname{tg}\alpha = (T-t_1)^2\operatorname{tg}\beta$.
Din figura 1.6 se observă că $t_2 \operatorname{tg}\alpha = (t_2-t_1)\operatorname{tg}\beta$. Împărțind memb[ru] cu membru cele două relații rezultă:

$$T = t_2+\sqrt{t_2(t_2-t_1)}.$$

1.7. Presupunem că prima lumînare arde pe distanța Δh_1 ș[i] a doua cu Δh_2 în timpul Δt (fig. 1.7.R). Umbra dată de prima lum[î]nare pe peretele din stînga va coborî cu distanța $\Delta x = \Delta h_1 + (\Delta h_1 - \Delta h_2) = 2\,\Delta h_1 - \Delta h_2$. Umbra pe peretele din dreapta va coborî pe distanța

$$\Delta y = \Delta h_2 - (\Delta h_1-\Delta h_2) = 2\,\Delta h_2 - \Delta h_1.$$

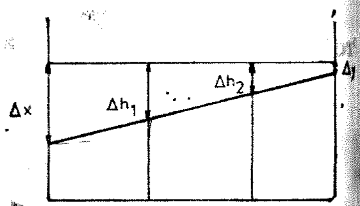

Fig. 1.7.R.

Deoarece: $\Delta h_1 = h\,\Delta t/t_1$; $\Delta h_2 = h\,\Delta t/t_2$ rezultă

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = h(2t_2-t_1)/t_1t_2,\quad v_2=\frac{\Delta y}{\Delta t} = h(2t_1-t_2)/t_1t_2.$$

1.8. a) Autobuzul se află în A, iar omul în B (fig. 1.8.R). Apl[icînd] teorema sinusului în triunghiul ABC se obține: AC = $\dfrac{b\sin}{\sin\beta}$

unde $\sin\beta = \dfrac{a}{BC}$. Rezultă $\sin\alpha = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{v_1t_1}{v_2t_2}$. Cum omul trebuie să ajungă mai devreme sau cel mult în același timp cu autobuzul la șosea ($t_1 \geqslant t_2$) rezultă $\sin\alpha \geqslant \dfrac{av_1}{bv_2} = 0{,}6$. Deci $36°45' \leqslant \alpha \leqslant 143°15'$.
Direcția după care poate merge omul este limitată de unghiul $\widehat{DBE}$ (hașurat pe fig. 1.8.R). Dacă va merge după direcțiile BD sau BE el va atinge șoseaua în același timp cu autobuzul.

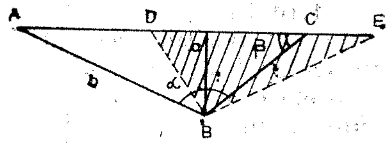

Fig. 1.8.R.

b) Viteza minimă rezultă din condițiile $t_1 = t_2$, $\sin\alpha = \dfrac{av_1}{bv_2} = 1$. Se obține $v_2 = \dfrac{a}{b}v_1 = 2{,}4$ m/s și $\alpha = 90°$.

1.9. a) $t_{AB} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{v_1} = 43$ s; $t_{ACB} = \dfrac{a}{v_2}+\dfrac{b}{v_1} = 42$ s. Deci, timpul de mișcare este mai scurt pe porțiunea ACB.

b) Presupunem că sportivul urmează ruta ADB (fig. 1.9.R). Se va determina distanța x = DC astfel ca timpul de mișcare pe porțiunea ADB să fie minim. Timpul de mișcare este

$$t = \frac{a-x}{v_2}+\frac{\sqrt{b^2+x^2}}{v_1} = \frac{v_2\sqrt{b^2+x^2}+v_1a-v_1x}{v_1v_2}\quad(1).$$

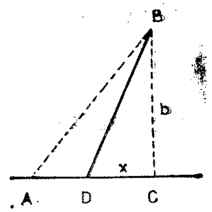

Fig. 1.9.R.

Timpul va fi minim, dacă expresia $y = v_2\sqrt{b^2+x^2} - v_1x$ (2) ia valoarea minimă. Relația (1) se poate pune sub forma:

$$x^2 - \frac{2yv_1}{v_2^2-v_1^2}x + \frac{v_2^2b^2-y^2}{v_2^2-v_1^2} = 0.$$ Se obțin pentru x rădăcinile:

$$x = \frac{v_1y \pm v_2\sqrt{y^2+b^2v_1^2-v_2^2b^2}}{v_2^2-v_1^2}.$$

Deoarece x nu poate fi complex este necesar ca: $y^2+b^2v_1^2 \geqslant v_2^2b^2$, relație din care rezultă minimul lui y:
$y_{min} = b\sqrt{v_2^2-v_1^2}$. Se obține apoi, $x = \dfrac{bv_1}{\sqrt{v_2^2-v_1^2}} = 4{,}02$ m (3).

Unghiul α **făcut** de segmentul BC cu BD este dat de rel

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{b} = \frac{v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = 0{,}1.$$

Observație. Același rezultat se obține anulînd derivata $\frac{dt}{dx}$ =

1.10. În figura 1.10 R am prezentat pozițiile celor trei autovehicule așa cum sînt văzute ele din sistemul legat de autoturism în stare inițială și finală (punctat). Ținînd seamă că vitezele relative ale autocamionului și autobuzului față de autoturism sînt $v_1 - v_2$ și respectiv $v_1 + v_3$ se poate scrie: $d_1 + d_2 = (v_1 -$

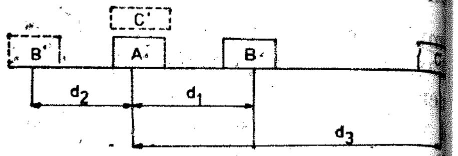

Fig. 1.10.R.

$d_3 = (v_1 + v_3)t$ de unde rezultă: $d_3 = (d_1 + d_2)\dfrac{(v_1 + v_3)}{(v_1 - v_2)} = 450$ m

1.11. $t = t_1 + t_2 = \dfrac{D}{v_1 + v_2} + \dfrac{D}{v_1 - v_2}$, $t = 6$h 15 min.

1.12. Notînd cu v_b și v_r, viteza bărcii și respectiv viteza rîu avem: $d = (v_b + v_r)t_1$, $d = (v_b - v_r)t_2$. Rezolvînd sistemul se obț

$$v_r = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right).$$

Timpul de mișcare al colacului de salvare este:

$$t = \frac{d}{v_r} = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 4h.$$

1.13. Timpul parcurs de avion este $t = \dfrac{s}{v}$, unde v este vit rezultantă a avionului. În figura 1.13, $v_2 \sin\alpha = v_1 \sin\beta$ și

$$v = v_1\cos\beta - v_2\cos\alpha = v_1\sqrt{1 - \frac{v_2^2\sin^2\alpha}{v_1^2}} - v_2\cos\alpha.$$

Deci, $t = \dfrac{s}{(\sqrt{v_1^2 - v_2^2\sin^2\alpha} - v_2\cos\alpha)} = \dfrac{s(\sqrt{v_1^2 - v_2^2\sin^2\alpha} + v_2\cos\alpha)}{(v_1^2 - v_2^2)}$

$= 7020$s $= 1$h 57 min.

1.14. Picătura se va mișca față de tub cu viteza v_2 în direcție verticală și cu viteza v_1 în direcție opusă mișcării căruciorului. Viteza rezultantă se obține prin compunerea vectorială a celor două viteze (fig. 1,14.R). Pentru ca picătura să se miște paralel cu pereții tubului este necesar ca direcția vitezei v să coincidă cu axa tubului. Deci, tg $\alpha = \dfrac{v_2}{v_1} =$ $= 3$ și $\alpha = 71°35'$.

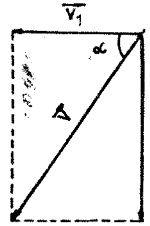

Fig. 1.14.R.

1.15. Pentru ca barca să se deplaseze tot timpul pe linia AB este necesar să existe egalitate între componentele normale la AB (fig. 1.15.R); deci $u \sin\beta = v \sin\alpha$ (1). Cînd barca se deplasează

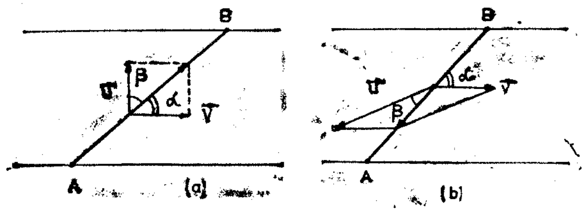

Fig. 1.15.R.

de la A la B viteza față de mal va fi $u\cos\beta + v\cos\alpha$ (fig. 1.15. a.R) și timpul de traversare va fi:

$$t_1 = \frac{d}{(u\cos\beta + v\cos\alpha)}.$$

În traversare de la B la A viteza este $u\cos\beta - v\cos\alpha$ (fig. 1.15.b.R); iar timpul $t_2 = \dfrac{d}{(u\cos\beta - v\sin\alpha)}$. Punînd condiția $t_1 + t_2 = t$ (2), rezultă un sistem de două ecuații cu două necunoscute și rezolvînd sistemul se obține:

$$\beta = \text{arc ctg}\,\frac{(d + \sqrt{d^2 + v^2t^2\cos^2\alpha})}{vt\sin\alpha} \cong 12°$$

$$\text{și}\quad u = v\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 8\ \text{m/s}.$$

1.16. a) Lungimea segmentului $AM = kl(k < 1)$, iar $BM = (1 - k)l$. Coordonatele punctului M sînt $x_M = (1 - k)l\cos\alpha$; $y_M = kl\sin\alpha$. Eliminînd α din cele două relații avem:

$$\frac{x^2}{l^2(1 - k)^2} + \frac{y^2}{k^2l^2} = 1. \qquad (1)$$

Traiectoria punctului M este o elipsă de semiaxe $l(1-k)$ şi lk.

b) Pentru mijlocul barei $k=\frac{1}{2}$, ecuaţia traiectoriei (1) devine: $x^2+y^2=\frac{l^2}{4}$, adică elipsa degenerează într-un cerc cu centrul în originea sistemului de referinţă şi rază $\frac{l}{2}$.

1.17. Notăm AC = BC = b şi din triunghiul AOC, $b^2=a^2+c^2=400$, adică $b=20$ m. Într-o poziţie oarecare (fig. 1.17.R) $AC_1=b+vt$ şi $BC_1=b-vt$. Notînd coordonatele punctului $C_1(x, y)$ putem scrie că $(a+x)^2+y^2=(b+vt)^2$; $(a-x)^2+y^2=(b-vt)^2$, de unde, după scădere,

$$x=\frac{bvt}{a} \quad \text{şi} \quad v_x=\frac{dx}{dt}=\frac{bv}{a};$$

$$y=-\sqrt{b^2-a^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)v^2t^2}$$

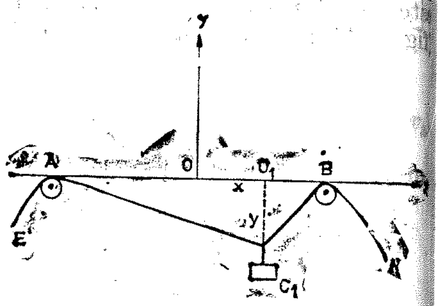

Fig. 1.17.R.

$$\text{şi } v_y=\frac{dy}{dt}=\frac{-v^2t\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}{\sqrt{b^2-a^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)v^2t^2}}.$$

Traiectoria se obţine eliminînd timpul din expresiile coordonatelor x şi y.

Rezultă: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2-a^2}=1$, care este ecuaţia unei elipse.

Viteza $\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=2\vec{i}+\frac{3t}{\sqrt{300-3t^2}}\vec{j}$

şi $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4+\frac{9t^2}{300-3t^2}}$.

1.18. a) Coordonata x_1 a punctului material se obţine înlocuind t_1 în legea de mişcare $x_1=A+Bt_1+Ct_1^3=4$ m.

b) $v=\frac{dx}{dt}=B+3Ct^2$; $v_1=-4$ m/s.

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=6Ct;\quad a_1=6Ct_1=-6\ \text{m/s}^2.$$

1.19. a) 10 m; b) 0; $\frac{8}{3}$ s; c) 4m/s;

d) 16 $12t_0-6\Delta t$; e) niciodată.

1.20. a) $t=0$;

b) $v_1=2$m/s; $v_2=2$m/s;

$a_1=-8$m/s²; $a_2=1$m/s².

1.21. a) Pentru $t=0$; $x_0=A=5$m. Coordonata maximă x_{max} se atinge cînd $v=0$. Deci $v=\frac{dx}{dt}=B+2Ct=0$; $t=-\frac{B}{2C}=2$s iar $x_{max}=x(t=2s)=9$m. Pentru $x=0$; se obţine $t=(2\pm3)$s. Reprezentarea grafică pentru $t\geq 0$ este dată în figura 1.21.R.

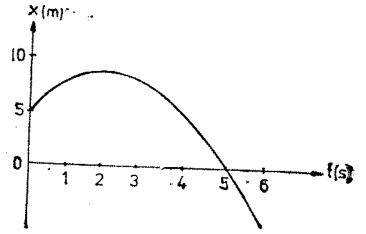

Fig. 1.21.R.

b) $v=\frac{(x_2-x_1)}{(t_2-t_1)}=-3$m/s deci mişcarea se produce în sensul negativ al axei Ox.

1.22. a) Mişcarea este uniform încetinită pînă în punctul (10,0) şi apoi uniform accelerată. În acest punct corpul se opreşte şi apoi viteza îşi schimbă sensul.

b) Viteza iniţială este $v_0=5$m/s, iar acceleraţia se scoate din relaţia $v_0-at=0$ obţinîndu-se $a=0,5$ m/s². Ecuaţia de mişcare este $s=5t-0,25t^2$.

1.23. Din ecuaţiile spaţiului $s_1=v_0t+\frac{at^2}{2}$, $s_2=(v_0+at)t+\frac{at^2}{2}$ rezultă $a=\frac{(s_2-s_1)}{t_2}=2,5$ m/s², $v_0=\frac{(3s_1-s_2)}{2t}=1$m/s.

1.24. a) Timpul total de mişcare al primului vehicul este $t=\frac{l}{v}=2h=120$ min. Din simetria mişcării vehiculului al doilea $t_1=t_2=\frac{t}{2}=60$ min, cu t_1 şi t_2 timpii de parcurgere a celor două jumătăţi de distanţă:

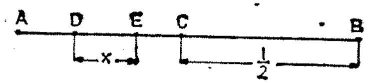

Fig. 1.24.R.

$$\frac{l}{2}=\frac{at_1^2}{2};\quad a=\frac{l}{t_1^2}=\frac{1}{216}\ \text{m/s}^2.$$

b) Conform figurii 1.24.R distanța x este $x = vt - \frac{at^2}{2}$ al cărui maxim se află pentru $t_0 = \frac{v}{a} = 30$ min. $AE = vt_0 = 15$ km.

c) $x_{max} = \frac{v^2}{2a} = 7,5$ km.

1.25. a) Reprezentarea grafică este dată în figura 1.25.R.

b) Notăm cu t_1 timpul în care mișcarea a fost uniform accelerată, cu t_2 durata de timp în care mișcarea a fost uniformă iar t_3 timpul scurs de la începerea mișcării uniform încetinite pînă la atingerea maximului coordonatei (anularea vitezei).

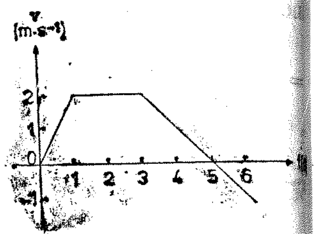

Fig. 1.25.R.

Coordonata atinsă după $t = t_1 + t_2 + t_3$ este $x_{max} = \frac{at_1^2}{2} + v_0t_2 + v_0t_3 - \frac{at_3^2}{2} = 7$m.

În ultima secundă a mișcării mobilul parcurge $x_4 = 0,5$m care se scade din x_{max}. Coordonata finală este: $x = x_{max} - x_4 = 6,5$m.

c) $d = x_{max} + x_4 = 7,5$ m.

1.26. a) Vitezele medii ale celor două vehicule sînt aceleași (deoarece parcurg același spațiu în același timp) și egale cu

$$v_m = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{2S_1}{\frac{S_1}{v_1} + \frac{S_1}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2} =$$

$$= 36 \text{ km/h}. \quad S_{AB} = v_m t_0 = 72 \text{ km}.$$

b) $a = \frac{2S}{t_0^2} = 36$ km/h²; $v_B = at_0 = 72$ km/h.

c) Momentele de timp pentru care vitezele celor două mobile sînt identice vor fi: $t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{5}{6}$ h; $t_2 = \frac{v_2}{a} = \frac{5}{4}$ h.

d) Primul vehicul străbate jumătate din distanță în $t' = \frac{S_{AB}}{2v_1} = \frac{6}{5}$ h și cealaltă jumătate în timpul $t'' = \frac{S_{AB}}{2v_2} = \frac{4}{5}$ h.

Dacă unul din vehicule l-ar ajunge pe celălalt ambele ar parcurge aceeași distanță și ar exista cel puțin una din egalitățile $v_1t = \frac{at^2}{2}$ pentru $t \leqslant \frac{6}{5}$ h;

$v_1t' + v_2(t - t') = \frac{at^2}{2}$ pentru $\frac{6}{5}\text{h} \leqslant t \leqslant 2\text{h}$.

În primul caz: $t = 0$ (vehiculele pleacă simultan la momentul inițial) sau $t = \frac{2v_1}{a} = \frac{5\text{h}}{3}$ (care este în dezacord cu condiția pusă).

În al doilea caz se obține: $t = 2$h (vehiculele ajung simultan în B) sau $t = \frac{\text{h}}{2}$ $\left(\text{ceea ce nu verifică condiția pusă } t \geqslant \frac{6\text{h}}{5}\right)$. Deci vehiculele nu se întîlnesc niciodată în intervalul AB.

1.27. Notăm cu a_1 accelerația rachetei și cu a_2 accelerația avionului. Dacă S este spațiul parcurs de rachetă, atunci prima jumătate va fi parcursă în timpul: $t_1 = \sqrt{\frac{S}{a_1}}$. A doua jumătate a spațiului este parcursă de rachetă în timpul $t_2 = \frac{S}{2a_1t_1} = \sqrt{\frac{S}{4a_1}}$.

Avionul parcurge același drum în timpul $t = \sqrt{\frac{2S}{a_2}}$.

Din condiția ca $t = t_1 + t_2$ rezultă că

$$\sqrt{\frac{S}{a_1}} + \sqrt{\frac{S}{4a_1}} = \sqrt{\frac{2S}{a_2}}, \text{ de unde } \frac{a_1}{a_2} = \frac{9}{8}.$$

1.28. a) Din relația lui Galilei $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2ad_1}$ și $v_2 = \sqrt{v_0^2 - 2ad_2}$ se obține

$$a = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2(d_2 - d_1)} = 1,8 \text{ m/s}^2; \quad v_0 = \sqrt{\frac{v_1^2d_2 - v_2^2d_1}{d_2 - d_1}} = 11,66 \text{ m/s}.$$

b) $t_{12} = \frac{v_1 - v_2}{a} = 1,1$ s.

c) $t_{op} = \frac{v_0}{a} = 6,48$ s; $S_{op} = \frac{v_0^2}{2a} = 37,8$ m.

d) Spațiul parcurs în ultimele $\tau = 2$s în mișcarea uniform încetinită este egal cu spațiul parcurs în primele $\tau = 2$s în mișcare uniform accelerată, pornind din repaus $S = \frac{a\tau^2}{2} = 3,6$ m.

6 c. – 348

1.29. a) $S_1 + S_2 = D$, unde $S_1 = v_{01}t_1 + \frac{a_1t_1^2}{2}$ și $S_2 = v_0t_2 - \frac{a_2t_2^2}{2}$, iar $t_2 = t_1 - \Delta t$. Se obține:

$$v_{01}t_1 + \frac{a_1t_1^2}{2} + v_{02}(t_1 - \Delta t) - \frac{a_2(t_1 - \Delta t)^2}{2} = D;$$

$$t_1 = 16{,}2 \text{ s}; \quad S_1 = 293{,}2 \text{ m}.$$

b) $v_1 = v_{01} + a_1t_1 = 26{,}2$ m/s; $v_2 = v_{02} - a_2t_2 = 13{,}9$ m/s;

c) $v_{m1} = \frac{(v_{01} + v_1)}{2} = 18{,}1$ m/s; $v_{m2} = \frac{(v_{02} + v_2)}{2} = 16{,}95$ m/s; $v_r = v_1 + v_2 = 40{,}1$ m/s.

d) Timpul pînă la oprire $(t_{op})_2 = \frac{v_{02}}{a_2} = 40$ s. Timpul comun de mișcare după ce s-au întîlnit este $t' = (t_{op})_2 - t_2 = 27{,}8$s. Distanța cerută este: $D' = v_1t' + \frac{a_1t'^2}{2} + v_2t' - \frac{a_2t'^2}{2} = 1408$ m.

1.2. Mișcarea corpurilor sub acțiunea unor tipuri de forțe

1.30. Din condiția ca spațiul străbătut în ultima secundă $S = nh$, unde $S = v_0t + \frac{gt^2}{2} - \left[v_0(t-1) + \frac{g}{2}(t-1)^2\right]$ și $h = v_0t + \frac{gt^2}{2}$, rezultă ecuația $t^2 + 2t\left(\frac{v_0}{g} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{2v_0}{ng} = 0$, de unde

$$t = \frac{1}{n} - \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} - \frac{1-n}{n^2}} = 6s.$$

Viteza finală, $v = v_0 + gt = 78{,}4$ m/s și $h = 294$ m.

1.31. a) Din simetria mișcării la urcare și coborîre, atunci cînd se neglijează frecarea, se obține $h = v_0\tau - g\frac{\tau^2}{2}$ căci spațiul parcurs în timpul τ la cădere în ultimele secunde este egal cu spațiul

parcurs la urcare în primele τ secunde: Se obține

$$v_0 = \frac{(2h + g\tau^2)}{2\tau} = 270 \text{ m/s} = v_f; \quad v_f = \sqrt{2gH}$$

și $$H = \frac{v_f^2}{2g} = 1395 \text{ m};$$

b) $h_{VI} = h_6 - h_5 = g(t_6^2 - t_5^2)/2 = 55$ m;

c) $v' = \sqrt{2g(H - h')} = 154{,}6$ m/s;

$$h' = v't' + g\frac{t'^2}{2} = \sqrt{2g(H - h')} \cdot t' + g\frac{t'^2}{2}; \quad t' = 1{,}24 \text{ s}.$$

1.32. a) În intervalul de timp de la $t_0 = 0$ la $t_1 = 50$s mișcarea este uniform accelerată și viteza este dată de expresia $v = 2gt$ (1) (segmentul de dreaptă OA), iar pentru $t > t_1$ racheta se mișcă uniform încetinit cu accelerația $-g$ (motorul nu mai funcționează), viteza fiind dată de relația $v = 100g - g(t - 50)$ (segmentul de dreaptă AB). În B, viteza este nulă, după care corpul cade cu accelerația g dacă nu reintră în funcțiune motorul (fig. 1.32.R).

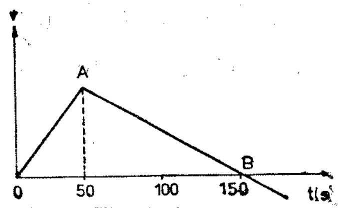

Fig. 1.32.R.

b) $h_{max} = \frac{1}{2}2gt_1^2 + 100g(t_B - 50) - \frac{g}{2}(t_B - 50)^2 = 75\,500$m.

c) De la înălțimea maximă racheta cade liber. Durata căderii este

$$t_c = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = 122{,}5 \text{ s}.$$

1.33. a) Deoarece $t_u = t_c = \frac{v_A}{g}$, unde s-a considerat observatorul în punctul A, atunci $\Delta t = t_u + t_c = \frac{2v_A}{g}$, încît $v_A = \frac{g\Delta t}{2} = 50$ m/s (s-a luat $g = 10$m/s^2); Din

$$v_A = \sqrt{v_0^2 - 2gh}, \quad v_0 = \sqrt{v_A^2 + 2gh} = 64 \text{ m/s};$$

b) $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = 205$ m; $t_u = \frac{v_0}{g} = 6{,}4$ s;

c) $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ şi rezultă $t_{1,2} = 1,4$ s; 11,4 s, unde t_1 corespunde timpului de urcare de la sol la observator, iar t_2 reprezintă timpul după care corpul se află din nou la înălţimea h, dar în cădere.

d) $h_{IV} = h_4 - h_3$ unde $h_4 = v_0 t_4 - \frac{gt_4^2}{2}$;

$$h_3 = v_0 t_3 - \frac{gt_3^2}{2}, \quad \text{cu } t_4 = 4s \text{ şi } t_3 = 3 \text{ s}.$$

Se obţine:

$$h_{IV} = v_0(t_4 - t_3) - \frac{g}{2}(t_4^2 - t_3^2) = 29 \text{ m}.$$

1.34. a) Pentru corpul ce cade din A se scrie: $H = \frac{gt^2}{2}$, iar pentru cel aruncat din C, $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. După adunarea celor două relaţii se obţine:

$$v_0 = \frac{H + h}{2H}\sqrt{2gH}.$$

b) $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(H+h)^2}{4H}$.

c) Timpul în care corpul ce cade din A ajunge în B este $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, iar timpul de urcare al corpului ce pleacă din C pînă la înălţimea maximă este $t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Timpul cerut este $t = t_1 - t_2 = \frac{(\sqrt{2gH} - \sqrt{2gh})}{g}$. Dacă $H > h$ al doilea corp se va arunca după ce primul începe să cadă, iar dacă $H < h$ corpul din B va fi aruncat înainte ca A să înceapă să cadă.

1.35. a) $h_1 + h_2 = h$, unde $h_1 = \frac{gt_1^2}{2}$; $h_2 = v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2}$ cu $t_1 = t_2 + \Delta t$ se obţine: $\frac{g(t_2 + \Delta t)^2}{2} + v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = h$; $t_2 = 2,75$s iar $h_2 = v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = 127,2$ m.

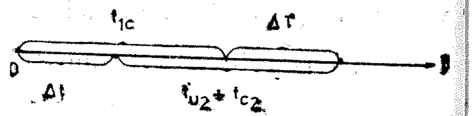

Fig. 1.35.R.

b) $v_1 = gt_1$; $v_2 = v_{02} - gt_2$; $v_r = v_1 + v_2 = v_{02} + g(t_1 - t_2) = 80$ m/s.

c) Din simetria mişcării, spaţiul parcurs în ultimele trei secunde este egal cu spaţiul parcurs la urcare în primele trei secunde cînd se aruncă cu $v_{01} = \sqrt{2gh} = 69,28$ m/s; $h_3 = v_{01}\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 162,84$ m.

d) Timpul de mişcare al fiecărui corp este:

$$t_{1c} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 6,93 \text{ s}; \quad t_{u2} = t_{c2} = \frac{v_0^2}{g} = 6 \text{ s};$$

$$\Delta T = t_{u2} + t_{c2} + \Delta t - t_{1c} = 7,07 \text{ s} \quad \text{(fig. 1.35.R)}$$

1.36. a) Reprezentarea grafică în plan a înălţimii corpurilor în funcţie de timp este dată în figura 1.36.R, unde s-a considerat $v_{01} > v_{02}$. Ecuaţiile ce exprimă poziţiile corpului faţă de sol sînt:

$$h_1 = v_{01}t_1 - \frac{gt_1^2}{2}; \; h_2 = v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

unde $\quad t_1 = t_2 + \Delta t.$

În momentul intîlnirii $h_1 = h_2$, încît

$$v_{01}t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_{02}(t_1 - \Delta t) - \frac{g}{2}(t_1 - \Delta t)^2.$$

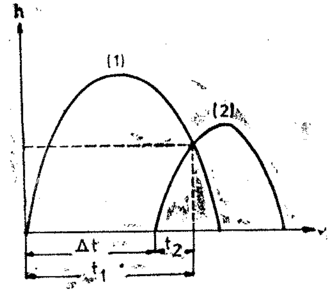

Fig. 1.36.R.

Se obţine:

$$t_1 = \frac{\left(v_{02} + \frac{g}{2}\cdot \Delta t\right)\Delta t}{v_{02} - v_{01} + g\Delta t}. \qquad (1)$$

b) $h_{int} = v_{01}t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ în care se înlocuieşte t_1 cu valoarea de mai sus.

c) $v_1 = v_{01} - gt_1$; $\quad v_2 = v_{02} - g(t_1 - \Delta t)$; $\qquad (2)$

d) Limita inferioară se obţine punînd condiţia ca cele două corpuri să atingă solul simultan $(\Delta t)_{min} = \frac{2}{g}(v_{01} - v_{02})$. Limita superioară corespunde aruncării celui de al doilea corp, în momentul sosirii primului corp la sol $(\Delta t)_{max} = 2v_{01}/g$.

Deci: $\frac{2}{g}(v_{01} - v_{02}) \leqslant \Delta t \leqslant \frac{2}{g}v_{01}$.

1.37. a) Componentele vitezelor celor două corpuri după axele x şi y sînt:

$$v_{1x} = v_0 \cos \alpha_1; \qquad v_{2x} = -v_0 \cos \alpha_2;$$

$$v_{1y} = v_0 \sin \alpha_1 - gt; \qquad v_{2y} = v_0 \sin \alpha_2 - gt.$$

Dacă u este viteza celui de al doilea corp faţă de primul atunci,

$$u_y = v_0 \sin \alpha_1 - gt - v_0 \sin \alpha_2 + gt = v_0(\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2);$$

$$u_x = v_0(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Rezultă:
$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = 2 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} v_0.$$

b) După timpul τ distanţa între corpuri va fi

$$S = u\tau = 2v_0 \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \tau.$$

1.38. În punctul de înălţime h, $\operatorname{tg} \beta = v_y/v_x$ unde

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$$

şi
$$v_y = \sqrt{v_{0y}^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh}.$$

Deci,
$$\operatorname{tg}^2\beta = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha - 2gh}{v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

de unde
$$h = \frac{v_0^2}{2g}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta) = 6{,}8 \text{ m}.$$

1.39. Distanţa $S = \sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}$, unde $y_2 = v_0 t \sin \alpha_2 - \frac{gt^2}{2}$, $y_1 = v_0 t \sin \alpha_1 - \frac{gt^2}{2}$, $x_2 = v_0 t \cos \alpha_2$, $x_1 = v_0 t \cos \alpha_1$ şi

$$S = v_0 t \sqrt{(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)^2 + (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)^2} =$$

$$= 2v_0 t \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = 10{,}35 \text{ m}.$$

1.40. a) Mişcarea este compusă: după Ox rectilinie şi uniformă, după Oy cădere liberă (fig. 1.40.R).

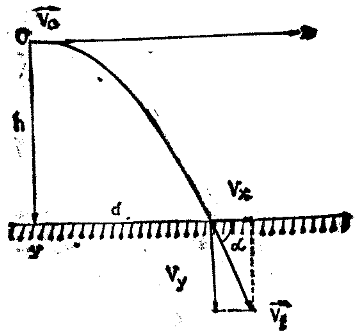

Fig. 1.40.R.

$$h = \frac{gt^2}{2}; \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

b) $v_x = v_0$, $v_y = gt$, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}$.

c) $d = v_0 t = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

d) Din conservarea energiei $\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_f^2}{2}$, de unde $v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

e) $\cos \alpha = \frac{v_x}{v_f} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$.

1.41. a) Mişcarea este reprezentată în figura 1.41.R. Fixăm originea sistemului de axe de coordonate în punctul de aruncare (A).

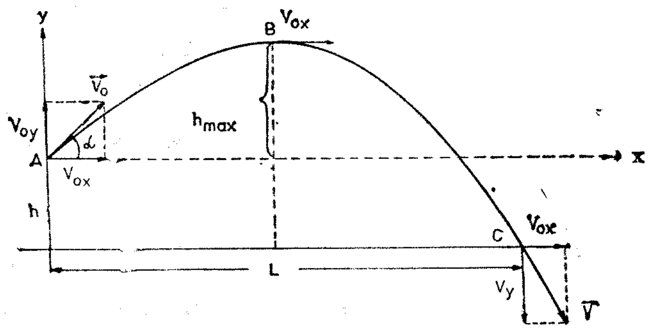

Fig. 1.41.R.

Mişcarea corpului este compusă din: mişcările pe porţiunile AB şi BC.

$$t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} + \sqrt{\frac{2}{g}(h + h_{max})},$$

unde: $h_{max} = v_{0y}^2/2g = v_0^2 \sin^2 \alpha/2g = 45$ m. Se obţine $t_{ABC} = 8{,}38$ s.

b) Mişcarea pe axa Ox este rectilinie şi uniformă avînd viteza $v_x = v_0 \cos \alpha = 51{,}96$ m/s, încît $L = v_x t_{ABC} = 435{,}44$ m.

c) $v_c = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + g^2 t_{BC}^2} = 74{,}83$ m/s,
sau din conservarea energiei

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_c^2}{2}; \quad v_c = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 74{,}83 \text{ m/s}.$$

d) $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt_{BC}}{v_0 \cos\alpha} = 1{,}0354$ și $\beta = 46°$.

1.42. Pentru corpul aruncat oblic, distanța parcursă pe orizontală este

$$L = v_{0x}t_1 = v_0 \cos\alpha \cdot 2\frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \qquad (1)$$

Pentru corpul aruncat pe orizontală, $x = v_0 t_2$; $y = \frac{gt_2^2}{2}$, astfel încît

$$y = \frac{g}{2}\cdot\frac{x^2}{v_0^2}, \text{ sau } \quad H = gL^2/2v_0^2. \qquad (2)$$

Egalînd valorile lui L din relațiile (1) și (2) se obține $H = \frac{v_0^2 \sin^2 2\alpha}{2g} = 375$ m.

Pentru aruncarea oblică $t_1 = 2\frac{v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = 10$ s, iar pentru aruncarea pe orizontală $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 8{,}66$ s, astfel încît $\Delta t = t_1 - t_2 = 1{,}34$ s.

1.43. Din ecuația parabolei, $y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$, $d = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$, de unde $\sin 2\alpha = \frac{dg}{v_0^2} = 0{,}882$, ceea ce corespunde la $\alpha_1 = 31°$ și $\alpha_2 = 59°$. Pe orizontală, proiectilul parcurge distanța $x = v_0 t \cos\alpha$, care va fi minimă pentru α_{max}, deci pentru $\alpha = 59°$. Înlocuind în ecuația parabolei $x = d + d_1$ și $y = -h$,

$$-h = (d + d_1)\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{g}{2}\frac{(d+d_1)^2}{v_0^2\cos^2\alpha}, \text{ rezultă } d_1 \simeq 63 \text{ m}.$$

1.44. a) Ecuațiile de mișcare ale proiectilului sînt (Fig. 1.44.R) $x = v_0 t \cos\alpha$; $y = v_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$. Eliminînd timpul rezultă ecua-

ția traiectoriei, $\quad y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (1).$

Ecuația dreptei ce intersectează suprafața înclinată cu planul xOy este

$$y = x\,\mathrm{tg}\,\beta \qquad (2).$$

Cele două curbe (1) și (2) se intersectează în punctele O și A. Valorile corespunzătoare ale lui x sînt date de ecuația:

$$x\,\mathrm{tg}\,\beta = x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

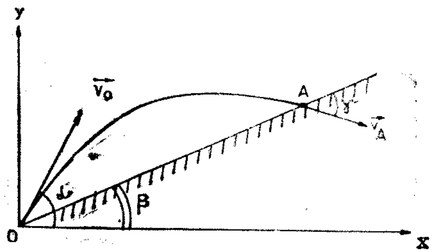

Fig. 1.44.R.

de unde $x_0 = 0$ (punctul 0) și

$$x_A = \frac{2v_0^2}{g}\cos^2\alpha(\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta) = \frac{v_0^2}{g}(\sin 2\alpha - 2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta)$$

(punctul A). Valoarea maximă a lui x_A se obține din condiția $\frac{dx_A}{dt} = \frac{v_0^2}{g}(2\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta) = 0$, de unde

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = -\mathrm{tg}\,\beta, \quad \text{sau} \quad \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

b) $x_{A_{max}} = \frac{v_0^2}{g}(\sqrt{1 + tg^2\beta} - \mathrm{tg}\,\beta)$, deoarece $\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta}}$.

$$y_{A_{max}} = x_{A_{max}}\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{v_0^2}{g}\mathrm{tg}\,\beta\,(\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\beta} - \mathrm{tg}\,\beta).$$

Dacă unghiul făcut de viteza proiectilului cu OA în A este γ,

$$\mathrm{tg}(\gamma - \beta) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\sqrt{2g(H_{max} - y_{A_{max}})}}{v_0\cos\alpha}, \quad \text{unde}$$

$$H_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}.$$

Rezolvînd ecuația rezultă:

$$\mathrm{tg}\left(\gamma - \frac{\pi}{4}\right) = \pm\sqrt{6} \quad \text{și} \quad \gamma - 45° = \pm 67{,}8°,$$

de unde $\gamma = (45 \pm 67{,}8)°$.

1.45. a) Mingea are viteză orizontală ceea ce înseamnă că ea se află în punctul de înălțime maximă,

$$H = v_0^2 \sin^2\alpha/2g, \quad \text{de unde} \quad v_0 = \sqrt{2Hg/\sin^2\alpha} = 14{,}5 \text{ m/s}.$$

b) În punctul de înălțime maximă accelerația este g și este orientată vertical, adică perpendicular pe viteză, care este orizontală. Atunci, $g = v^2/R$, de unde $R = v_0^2 \cos^2\alpha/g = 2{,}46$ m. Pentru a determina raza de curbură la un moment de timp oarecare t notăm cu $a_\perp$ și $a_\parallel$ componentele accelerației perpendiculară și paralelă cu viteza: $a_\perp^2 = g^2 - a_\parallel^2$. Energia totală fiind constantă rezultă $\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + mgh\right) = 0$, adică $v\frac{dv}{dt} = -g\frac{dh}{dt} = -gv_y$. Amintindu-ne că $a_\parallel = \frac{dv}{dt}$ găsim că $a_\parallel = -g\frac{v_y}{v}$ și $a_\perp = g\frac{v_x}{v}$ și deoarece $a_\perp = \frac{v^2}{R}$, $R = \frac{v^2}{a_\perp} = \frac{v^3}{gv_x}$. Dar, $v_x = v_0 \cos\alpha$, $v_y = v_0 \sin\alpha - gt$ și $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, astfel că

$$R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2 - 2gv_0t\sin\alpha)^{3/2}}{gv_0\cos\alpha}.$$

1.46. a) $$a_u = \frac{G + F_f}{m} = \frac{G + G/n}{m} = g\left(1 + \frac{1}{n}\right);$$

$$a_c = \frac{G - F_f}{m} = g\left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

b) $$h_{max} = \frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(1 + 1/n)};$$

c) $$t_u = \frac{v_0}{a_u} = \frac{v_0}{g(1 + 1/n)}; \quad t_c = \sqrt{\frac{2h_{max}}{a_c}} = \frac{v_0}{g\sqrt{1 - 1/n^2}};$$

$$t_t = t_u + t_c = \frac{nv_0}{g}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}\right).$$

d) $$v_f = \sqrt{2a_c h_{max}} = v_0\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

1.47. a) Forța de tracțiune totală este:

$$F_{t_1} = F_{f_1} + F_{f_2} + F_{f_3} = \mu_1 m_1 g + \mu_2 m_2 g + \mu_3 m_3 g.$$

b) După desprinderea corpului de masă m_3, restul sistemului se mișcă uniform accelerat sub acțiunea forței rezultante, $R' = F_{t_1} - F_{f_1} - F_{f_2} = \mu_3 m_3 g$, astfel $a' = \mu_3 m_3 g/(m_1 + m_2)$.

c) Prin desprinderea și a corpului de masă m_2, corpul de masă m_1 se mișcă uniform accelerat sub acțiunea forței rezultante $R'' = F_{t_1} - \mu_1 m_1 g = \mu_2 m_2 g + \mu_3 m_3 g$, cu accelerația

$$a'' = R''/m_1 = (\mu_2 m_2 + \mu_3 m_3)g/m_1.$$

1.48. a) Proiecția forțelor pe direcția de mișcare a corpului este (fig. 1.48.R).

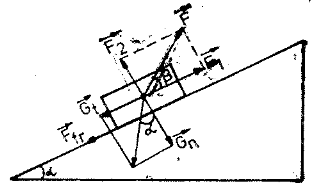

Fig. 1.48.R.

$$R = F_1 - G_t - F_f = F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta),$$

iar accelerația mișcării este:

$$a = R/m = (F\cos\beta - mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha + \mu F\sin\beta)/m =$$

$$= \frac{F(\cos\beta + \mu\sin\beta)}{m} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 2{,}9 \text{ m/s}^2.$$

Deci mișcarea va fi uniform accelerată cu viteză inițială.

b) $v = v_0 + at = 11{,}8$ m/s; $S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 24$ m.

c) După încetarea forței F mișcarea devine uniform încetinită din cauza lui G_t și F_f, cu accelerația

$$a_u = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 6{,}7 \text{ m/s}^2.$$

$$t_{op} = v/a_u = 1{,}76 \text{ s}; \quad S_{op} = v^2/2a_u = 10{,}4 \text{ m}.$$

1.49. a) Forța F se descompune în două componente (fig. 1.49.R) $F_1 = F\cos\alpha$, $F_2 = F\sin\alpha$. Accelerația corpului va fi

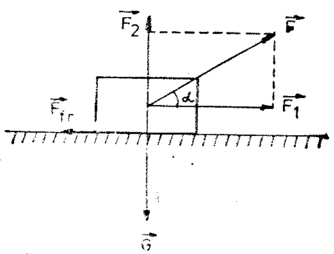

Fig. 1.49.R.

$$a = \frac{F_1 - F_f}{m} = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}.$$

Ecuațiile de mișcare sînt: $v = v_0 + at$; $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$.

b) Pentru mișcarea uniformă $a = 0$, astfel încît se obține:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}. \qquad (1)$$

c) Pentru a calcula minimul relației (1) se anulează derivata ei în raport cu α:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \frac{\mu mg(\mu \cos \alpha_0 - \sin \alpha_0)}{(\cos \alpha_0 + \mu \sin \alpha_0)^2} = 0$$

de unde rezultă $\text{tg}\, \alpha_0 = \mu$. Folosind

$$\sin \alpha_0 = \text{tg}\, \alpha_0/\sqrt{1 + \text{tg}^2\alpha_0} = \mu/\sqrt{1 + \mu^2}; \quad \cos \alpha_0 = 1/\sqrt{1 + \mu^2}$$

și înlocuind în relația (1) se obține

$$F_{\min} = \mu mg/\sqrt{1 + \mu^2}.$$

Observație. La punctul c) notînd $\mu = \text{tg}\, \varphi$ relația (1) devine $F = \mu\, mg \cos \varphi/\cos(\alpha_0 - \varphi)$, care este maximă dacă $\alpha_0 = \varphi$, adică $F = \mu mg/\sqrt{1 + \mu^2}$.

1.50. a) Pentru a afla accelerația ascensorului scriem ecuația de mișcare a sistemului ca un întreg: $(M_1+M_2)a=F-(M_1+M_2)g$, de unde $a = \dfrac{F}{M_1 + M_2} - g$.

b) Asupra masei M_1 acționează două forțe: tensiunea din fir și greutatea sa. Deci, $M_1a = T - M_1g$ (masa M_1 se deplasează în sus cu accelerația a odată cu liftul) adică

$$T = M_1(a + g) = M_1 \frac{F}{M_1 + M_2}.$$

c) După ruperea firului asupra masei M_1 acționează doar greutatea, astfel că ea se deplasează în jos cu accelerația g. Accelerația ascensorului este îndreptată tot în sus. Modulul ei îl găsim din ecuația de mișcare scrisă în noile condiții: $M_2a_2 = F - M_2g$, adică

$$a_2 = \frac{F - M_2g}{M_2} = \frac{F}{M_2} - g.$$

d) Față de ascensor masa M_1 se deplasează cu accelerația $a_1 = g + a_2 = F/M_2$. Spațiul S va fi parcurs în timpul t: $S = \dfrac{1}{2} a_1t^2$, de unde $t = \sqrt{2S/a_1} = \sqrt{2SM_2/F}$

1.51. a) În cazul în care ascensorul urcă cu accelerația a, ecuațiile de mișcare pentru cele două mase (conf. fig. 1.51.R) se scriu $T = m_1(a+a_1+g)$; $T+m_2a_1=m_2(a+g)$, de unde $T=2m_1m_2(a+g)/(m_1+m_2)$. Indicația dinamometrului este $F = T = 4m_1m_2(a + g)/(m_1 + m_2) = 34$ N.

b) Cînd $a = 0$, $F_1 = 2T_1 = 4m_1m_2g/(m_1+m_2) = 26$ N.

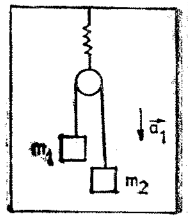

Fig. 1.51.R.

1.52. Scriem ecuația de mișcare pentru planul m_1. Asupra lui acționează două forțe: F și N_1, care este forța cu care acționează masa m asupra lui m_1. Proiecția orizontală a lui N_1 este egală cu $N_1/\sqrt{2}$ (fig. 1.52.R) și are sens opus lui F_1 adică:

$$m_1a_1 = F - \frac{N_1}{\sqrt{2}}. \quad (1)$$

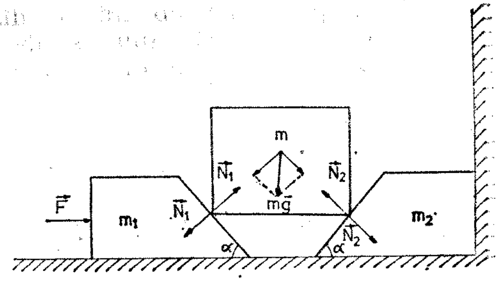

Fig. 1.52.R.

Pentru masa m, care urcă pe planul înclinat m_2 după o direcție care face unghiul $\alpha = 45°$ cu orizontala, ecuația de mișcare este:

$$ma = N_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}}. \quad (2)$$

Pentru a găsi relația dintre accelerațiile a și a_1 observăm că deplasarea de-a lungul planului m_2 este de $\sqrt{2}$ ori mai mică decît deplasarea lui m_1 pe orizontală. Deci $a = a_1/\sqrt{2}$ (3). Înlocuind relația (3) în (1) și (2) rezultă:

$$m_1a_1 = F - \frac{N_1}{\sqrt{2}}; \quad ma_1 = -mg + \sqrt{2}\, N_1, \quad \text{de unde}$$

a) $a_1 = \dfrac{2F - mg}{2m_1 + m} = 19{,}6\ \text{m/s}^2 = 2g$

b) $a = a_1/\sqrt{2} = \sqrt{2}\, g$.

c) $N_2 = mg/\sqrt{2} = 2660$ N.

1.53. În figura 1.53.R sînt reprezentate forțele care acționează asupra cuburilor și penei.

Accelerațiile celor două cuburi sînt egale și de sens opus. Notînd cu a accelerația unui cub și proiectînd legea a doua a lui Newton, scrisă pentru cubul din stînga, pe direcțiile orizontală și verticală, rezultă:

$$Ma = F \cos \alpha - \mu N, \quad (1)$$

$$0 = F \sin \alpha + Mg - N, \quad (2)$$

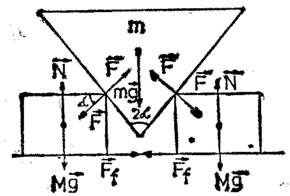

Fig. 1.53.R.

unde μN este forța de frecare.

Notînd cu a_1 accelerația penei, legea a doua a lui Newton pentru pană se scrie:

$$ma_1 = mg - 2F \sin \alpha. \quad (3)$$

În timp ce pana coboară cu o distanță h în spațiul dintre cuburi, fiecare din cele două cuburi se deplasează pe suprafața orizontală cu h tg α. Astfel relația dintre accelerațiile a și a_1 va fi :

$$a = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Din relațiile (1)—(4) rezultă :

$$a = g \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{m(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) - 2\mu M \operatorname{tg} \alpha}{m(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha) + 2M \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

1.54. a) În figura 1.54.R sînt reprezentate forțele ce acționează asupra corpului și asupra penei.

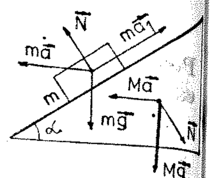

Fig. 1.54.R.

Legea a doua a lui Newton, proiectată pe direcția orizontală, pentru pană se scrie :

$$Ma = N \sin \alpha, \qquad (1)$$

iar pentru corpul m, proiectată pe direcția planului înclinat și pe direcția perpendiculară pe aceasta, se scrie :

$$ma_1 = ma \cos \alpha + mg \sin \alpha \qquad (2)$$

$$N + ma \sin \alpha = mg \cos \alpha. \qquad (3)$$

Din (1) și (3),

$$a = \frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = 1{,}96 \ \mathrm{m/s^2} \qquad (4)$$

b) Înlocuind (4) în (2) rezultă :

$$a_1 = \frac{(M + m) g \sin \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} = 8{,}3 \ \mathrm{m/s^2}. \qquad (5)$$

1.55. a) Ecuația de mișcare a masei este (fig. 1.55.R) $F_{fr} = \frac{G_1}{g} a_1$, iar a corpului $F - F_{fr} = \frac{G_2}{g} a_2$. Presupunem că forța F este atît de mică încît corpul nu se mișcă pe masă. Deci $a_1 = a_2$ și $F = F_{fr} \frac{G_1}{G_1 + G_2}$.

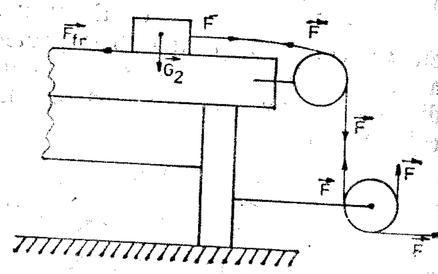

Fig. 1.55.R.

Pentru ca masa și corpul să se deplaseze ca un întreg este necesar ca forța de frecare să nu depășească valoarea $F_{fr\,max} = \mu G_2$.

Corpul va începe să alunece pe masă cînd

$$F > F_{fr\,max} \frac{G_1 + G_2}{G_1} = \mu \frac{G_2}{G_1}(G_1 + G_2) = 100 \ \mathrm{N}.$$

În cazul nostru $F = 80$ N, deci corpul nu va aluneca și

$$a_1 = a_2 = \frac{F}{G_1 + G_2} g = \frac{8}{25} g \simeq 3{,}14 \ \mathrm{m/s^2}.$$

b) În acest caz ecuațiile de mișcare pentru masa cu scripeți și pentru corp sînt :

$$-F + F_{fr} = \frac{G_1}{g} a_1; \quad F - F_{fr} = \frac{G_2}{g} a_2.$$

Deoarece accelerațiile masei și corpului sînt opuse vom avea alunecare, deci $F_{fr} = \mu G_2$. Accelerația masei este orientată spre stînga și are valoarea :

$$a_1 = (-F + \mu G_2) g / G_1 = -2g/15 = -1{,}31 \ \mathrm{m/s^2}.$$

1.56. a) Valoarea forței de frecare de alunecare este $F_{fr} = \mu mg = 5$N. Corpul de masă m este supus acțiunii forțelor F_1 și F_{fr}. Cum : $F_1 < F_{fr}$, rezultă că nu are loc o alunecare pe platforma M, mișcarea corpurilor făcîndu-se ca un întreg. $F_1 = (m + M)a$, de unde rezultă $a = F_1/(m + M) = 9$ cm/s^2. Ecuațiile de mișcare pentru cele două corpuri sînt $F_1 - F_{fr} = ma$ și $F_{fr} = Ma$, obținîndu-se

$$F_{fr} = \frac{MF_1}{M + m} = 1{,}8 \ \mathrm{N}.$$

b) În cazul al doilea $F_2 > F_{fr}$. Ecuațiile de mișcare pentru cele două corpuri se scriu : $F_2 - \mu mg = ma_1$, $\mu mg = Ma_2$. Deci,

$$a_1 = (F_2 - \mu mg)/m = 7{,}5 \ \mathrm{m/s^2}; \quad a_2 = \mu mg / M = 0{,}25 \ \mathrm{m/s^2}.$$

c) $l = (a_1 - a_2) t^2 / 2$ și rezultă $t = 4$s.

1.57. Dacă se notează cu T, tensiunea din fir, în cazul deplasării corpurilor cu aceeași accelerație (forța de frecare dintre corpuri fiind mai mică decît forța de frecare de alunecare) legea fundamentală a dinamicii pentru cele trei corpuri se scrie :

$$m_3 a = m_3 g - 2T, \qquad (1)$$

$$m_1 a = T - F_f, \qquad (2)$$

$$m_2 a = T + F_f. \qquad (3)$$

Relațiile (2) și (3) au fost scrise în ipoteza că forța de frecare ce apare între m_1 și m_2 se opune mișcării lui m_1. Se obține din acest sistem valoarea forței de frecare

$$F_f = m_3g(m_2 - m_1)/2(m_1 + m_2 + m_3). \qquad (4)$$

În cazul cînd corpurile m_1 și m_2 se deplasează cu accelerații diferite atunci forța de frecare are valoarea maximă $F_f = \mu m_2 g$. Ea participă la accelerarea lui m_2 dacă $a_1 > a_2$.

Condiția de mișcare a corpurilor cu aceeași accelerație va fi:

$$|F_f| \leqslant \mu\, m_2 g, \qquad (5)$$

adică

$$\left|\frac{m_3(m_2 - m_1)}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\right| \leqslant \mu\, m_2.$$

1.58. a) Ecuațiile de mișcare ale corpului și blocului se scriu $ma_1 = F_f$ și $Ma_2 = F - F_f$, unde F_f este forța de frecare, iar a_1 și a_2 accelerațiile corpurilor. Presupunem că nu există alunecare, deci $a_1 = a_2$. Din ecuațiile de mișcare ale celor două corpuri se obține: $F_f = m\dfrac{F}{M + m}$. Pentru ca masa m să nu alunece este necesar ca forța de frecare de alunecare: $F_f \leqslant \mu mg$, sau $\dfrac{F}{M + m} \leqslant \mu g$. Dacă $F > \mu(M + m)g$ corpul va începe să alunece. Ecuațiile de mișcare vor avea forma $ma_1 = \mu mg$ și $Ma_2 = F - \mu mg$. Se obține $a_1 = \mu g$ și $a_2 = \dfrac{F - \mu mg}{M}$ unde $a_2 > a_1$.

b) Accelerația corpului față de bloc va fi opusă mișcării și va fi egală în mărime cu $a_2 - a_1$. Timpul în care corpul se mișcă pe bloc este $T = \sqrt{\dfrac{2lM}{F - \mu g(M + m)}}$.

1.59. În figura 1.59. a,b,c.R sînt reprezentate forțele ce acționează asupra fiecăruia dintre corpuri. Ecuațiile de mișcare ale corpurilor m_1 și m_2 sînt:

$$m_1a_1 = m_1g - T; \quad m_2a_1 = T + N\sin\alpha.$$

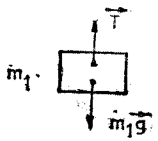

Fig. 1.59.a.R.

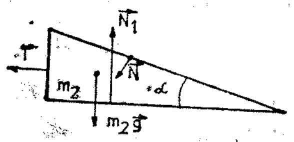

Fig. 1.59.b.R.

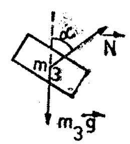

Fig. 1.59.c.R.

Pentru corpul de masă m_3, ecuațiile de mișcare pe orizontală și verticală se scriu: $m_3a_2 = N\sin\alpha$; $m_3a_3 = m_3g - N\cos\alpha$.

Considerînd două poziții ale corpului m_3 pe plan (fig. 1.59.d.R) se observă că putem scrie:

$$h = \frac{a_3t^2}{2} \quad \text{și} \quad l = \frac{(a_1 + a_2)t^2}{2}.$$

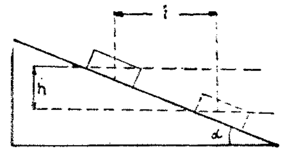

Fig. 1.59.d.R.

Dar, $\dfrac{h}{l} = \dfrac{a_3}{a_1 + a_2} = \mathrm{tg}\alpha$. Din cele patru ecuații se obține:

$$a_1 = \frac{m_1 + m_3\sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2 + m_3\sin^2\alpha}\, g.$$

$$a_2 = \frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha\cos\alpha - m_1\sin^2\alpha}{m_1 + m_2 + m_3\sin^2\alpha}\, g;$$

$$a_3 = \frac{m_1\sin\alpha\cos\alpha + (m_1 + m_2 + m_3)\sin^2\alpha}{m_1 + m_2 + m_3\sin^2\alpha}\, g.$$

1.60. a) La deplasarea corpului în sus pe plan, ecuația de mișcare este

$$ma_y = -mg\sin\theta - F_{fr} = -mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta,$$

sau

$$a_y = -g(\sin\theta + \mu\cos\theta) = -g\cos\theta(\mathrm{tg}\theta + \mu).$$

b) La deplasarea corpului în jos pe plan, ecuația de mișcare este

$$ma_y = mg\sin\theta - \mu\, mg\cos\theta,$$

$$a_y = g(\sin\theta - \mu\cos\theta) = g\cos\theta(\mathrm{tg}\,\theta - \mu).$$

Dacă $\mu \geqslant \mathrm{tg}\,\theta$ deplasarea nu este posibilă doar sub acțiunea greutății.

c) Desenăm planul suprafeței înclinate (fig. 1.60.R). Proiectăm accelerațiile pe cele două direcții în cazul în care corpul se deplasează în sus, de la A la B:

$$a_x = -\mu g\cos\theta\cos\varphi - g\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi =$$
$$= -g(\mu\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi;$$
$$a_y = -g\sin\theta - \mu g\cos\theta\sin\varphi - g\sin\theta\cos^2\varphi =$$
$$= -g(\mu\cos\theta + \sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi.$$

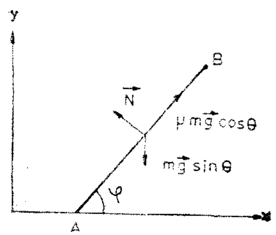

Fig 1.60.R.

În cazul deplasării în jos, de la B la A;

$$a_x = g(\mu\cos\theta - \sin\theta\sin\varphi)\cos\varphi, \quad a_y = g(\mu\cos\theta - \sin\theta\sin\varphi)\sin\varphi.$$

1.61. a) În punctul de oprire viteza fiind nulă,

$$S = \frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} = 0{,}68 \text{ m}.$$

b) Timpul de urcare este $t_u = \dfrac{v_0}{a_u} = \dfrac{v_0}{g(\sin\theta + \mu\cos\theta)} = 0{,}45$ s şi timpul de coborîre

$$t_c = \sqrt{\frac{2S}{a_c}} = \sqrt{\frac{2S}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}} = 0{,}65 \text{ s}.$$

Timpul total de revenire în punctul de plecare este $t_1 + t_2 = 1{,}1$ s.

c) Energia mecanică transformată în căldură este egală cu lucrul mecanic al forţelor de frecare pe drumul dus-întors; $Q = L = 2\mu m g S \cos\theta \simeq 2{,}3$ J. Acelaşi rezultat se poate obţine şi din variaţia energiei cinetice:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2}(v_0^2 - a_2^2t_2^2) \simeq 2{,}3 \text{ J}.$$

1.62. a) Acceleraţiile corpului la urcare şi coborîre pe plan sînt:

$$a_u = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha); \quad a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha),$$

iar

$$t_u = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}; \qquad S_{0p} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$$

$$t_c = \sqrt{\frac{2S_{0p}}{a_c}} = \frac{v_0}{g\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}},$$

astfel încît

$$\frac{t_u}{t_c} = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 0{,}8 \text{ s}.$$

b) $v_f = \sqrt{2a_c S_{0p}} = v_0\sqrt{\dfrac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}}$;

$$\frac{v_0}{v_f} = \sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}};$$

adică viteza finală este mai mică decît viteza iniţială, din cauza frecării. Dacă nu ar exista frecare ($\mu = 0$), raportul anterior ar deveni $v_0/v_f = 1$, adică cele două viteze ar fi egale.

c) $$\eta = \frac{W_u}{W_c} = \frac{G_t \cdot l}{(G_t + F_f)l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = 0{,}83$$

1.63. a) Forţele ce acţionează asupra corpului sînt reprezentate în figura 1.63.R. Condiţia de urcare uniformă pe plan este:

$F_i = G_t + F_f$, (1) unde $F_i = ma\cos\alpha$;

$G_t = mg\sin\alpha$;

$F_f = \mu N = \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha)$.

Înlocuind în relaţia (1), avem:

$$a = g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = g\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\operatorname{tg}\alpha} = 14{,}7 \text{ m/s}^2.$$

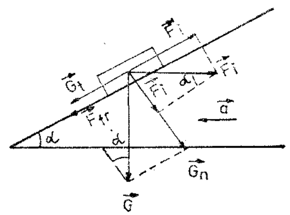

Fig. 1.63.R.

b) În cazul în care corpul coboară uniform, forţa de frecare îşi schimbă sensul faţă de cazul anterior, astfel încît $G_t = F_i + F_f$, adică

$$mg\sin\alpha = ma\cos\alpha + \mu(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha),$$

de unde rezultă:

$$a = g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = g\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{1 + \mu\operatorname{tg}\alpha} = 6{,}54 \text{ m/s}^2.$$

1.64. Descompunem greutatea G în două componente $G_\parallel = G\sin\alpha$ şi $G_\perp = G\cos\alpha$ (în raport cu direcţia planului înclinat) şi forţa F în $F_\parallel = F\cos\alpha$ şi $F_\perp = F\sin\alpha$. Ecuaţia de mişcare în cazul în care particula porneşte în sus pe plan se scrie:

$$F_\parallel - G_\parallel = \mu(F_\perp + G_\perp).$$

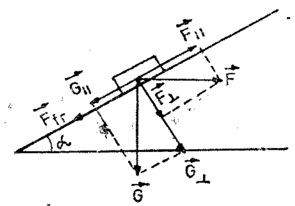

Fig. 1.64.a.R.

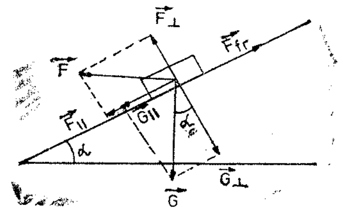

Fig. 1.64.b.R.

Atunci (fig. 1.64.a.R)

$$F\cos\alpha - G\sin\alpha = \mu(F\sin\alpha + G\cos\alpha)$$

16

de unde:

$$F = 3G\,\mathrm{tg}\,\alpha/(1 - 2\mathrm{tg}^2\alpha) = 3\mu G/(2 - \mu^2).$$

În cazul în care corpul porneşte în jos pe plan, ecuaţia de mişcare (fig. 1.64.b.R) se scrie:

$$F\cos\alpha + G\sin\alpha = \mu(G\cos\alpha - F\sin\alpha)$$

şi

$$F = G\,\mathrm{tg}\alpha/(1 + 2\mathrm{tg}^2\alpha) = \mu G/(2 + \mu^2)$$

1.65. Într-un timp t, în cădere liberă, corpul A parcurge: $S_1 = \frac{gt^2}{2}$. În acelaşi timp planul se deplasează pe distanţa $S_2 = \frac{at^2}{2}$; se vede că $\frac{S_2}{S_1} = \mathrm{ctg}\,\alpha$. Deci, $a = g\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. Sensul acceleraţiei planului este indicat în figura 1.65.R.

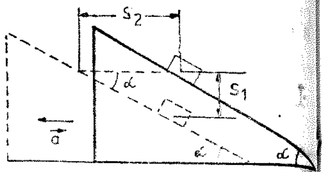

Fig. 1.65.R.

1.66. În sistemul de referinţă legat de cărucior asupra tînărului acţionează în afară de greutate şi forţa de inerţie $ma = mg\sin\alpha$ (fig. 1.66.R). Greutatea indicată de cîntar va fi egală cu

$$G_1 = mg(1 - \sin^2\alpha) = mg\cos^2\alpha,$$

de unde

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{G_1}{mg}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{şi } \alpha = 30°$$

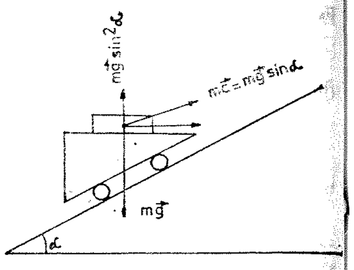

Fig. 1.66.R.

1.67. a) Considerăm mişcarea corpurilor înainte de a apărea alunecarea unuia faţă de celălalt şi scriem ecuaţia de mişcare a corpurilor considerate ca un întreg

$$(m_1 + m_2)a = F - (m_1 + m_2)g\sin\alpha - \mu_2(m_1 + m_2)\,g\cos\alpha.$$

Asupra corpului m_1 acţionează doar forţa de frecare egală cu $\mu_1 m_1 g\cos\alpha$ şi componenta tangenţială a greutăţii $m_1 g_1\sin\alpha$. Corpul m_1 se deplasează cu aceeaşi acceleraţie a, deci,

$$m_1 a = \mu_1 m_1 g\cos\alpha - m_1 g\sin\alpha,$$

de unde

$$a = g(\mu_1\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{g}{13} \cong 0{,}75\ \mathrm{m/s^2}.$$

b) Forţa F va avea valoarea:

$$F = (m_1 + m_2)(a + g\sin\alpha + \mu_2 g\cos\alpha) = \frac{10}{13}(m_1 + m_2)\,g = 1{,}86\ \mathrm{N}.$$

1.68. În figura 1.68R sînt reprezentate forţele care acţionează asupra corpului (fig. 1.68.a, R) şi asupra planului înclinat (fig. 1.68.b.R.).

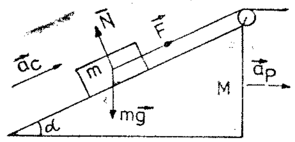

Fig. 1.68.a.R.

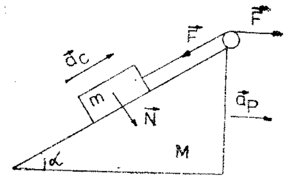

Fig. 1.68.b.R.

Notăm proiecţiile acceleraţiei corpului $\vec{a_c}$ pe direcţiile orizontală şi verticală cu a_x şi a_y şi cu $\vec{a_p}$ acceleraţia planului înclinat, paralelă cu direcţia orizontală.

Ecuaţiile de mişcare pentru corp şi plan în raport cu suprafaţa orizontală se scriu:

$$F\cos\alpha - N\sin\alpha = ma_x, \tag{1}$$

$$F\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = ma_y \tag{2}$$

$$F - F\cos\alpha + N\sin\alpha = Ma_p. \tag{3}$$

Componenta orizontală a acceleraţiei corpului în raport cu planul înclinat este

$$a_x - a_p = \frac{a_y}{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{4}$$

Eliminînd pe N rezultă acceleraţiile:

$$a_p = \frac{F(1 - \cos\alpha) + mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}, \tag{5}$$

$$a_x = \frac{F(m\sin^2\alpha + M\cos\alpha) - Mmg\sin\alpha\cos\alpha}{m(M + m\sin^2\alpha)} \tag{6}$$

şi

$$a_y = \frac{F\cos\alpha[M + m(1 - \cos\alpha)] - mg(M + m)\sin\alpha\cos\alpha}{m(M + m\sin^2\alpha)}\,\mathrm{tg}\alpha. \tag{7}$$

Acceleraţia corpului faţă de suprafaţa orizontală va fi

$$a_c = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \tag{8}$$

Condiţiile necesare urcării corpului pe plan sînt

$$a_x \geq a_p, \qquad N \geq 0 \tag{9}$$

de unde rezultă:

$$\frac{m(M+m)\sin\alpha}{M+m(1-\cos\alpha)}\, g \leq F \leq \frac{M\cos\alpha}{(1-\cos\alpha)\sin\alpha}\cdot g. \tag{10}$$

1.69. Dacă notăm cu x lungimea porţiunii cablului ce atîrnă vertical şi cu $m_x = m\frac{x}{l}$ masa acestei porţiuni de cablu, de-a lungul planului înclinat rămîne restul cablului cu masa $m - m_x = m\frac{l-x}{l}$. Ecuaţia de mişcare a cablului, dacă acesta începe să alunece spre baza planului înclinat, este: $(m-m_x)\, g\sin\alpha = (m-m_x)\,\mu g\cos\alpha + m_x g$, sau $\frac{l-x}{l}\, g\sin\alpha = \frac{l-x}{l}\,\mu g\cos\alpha + \frac{x}{l}\, g$, de unde $x = \frac{l(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{1+\sin\alpha-\mu\cos\alpha}$. Dacă cablul începe să alunece spre vîrful planului înclinat ecuaţia de mişcare se scrie: $(m-m_x)\, g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha) = m_x g$, de unde $x = \frac{l(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha}$.

1.70. a) Mişcarea pe planul înclinat AB este uniform încetinită cu acceleraţia $a_u = g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, astfel încît:

$$v_B = \sqrt{v_0^2 - 2gl(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} = 11{,}26 \text{ m/s}.$$

b) $H = h + h_{max} = l\sin\alpha + \frac{v_B^2\sin^2\alpha}{2g} = 6{,}58$ m.

c) $t_t = t_{AB}+t_{BC}+t_{CD} = \frac{v_A - v_B}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)} + \frac{v_B\sin\alpha}{g} + \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2{,}35$ s.

1.71. a) $v_2=\sqrt{v_1^2+2ad}$; $a = \frac{(v_2^2-v_1^2)}{2d}$; $T - \mu m_1 g = m_1 a$;

$$T = m_1\left(\mu g + \frac{v_2^2-v_1^2}{2d}\right);$$

b) $F - \mu m_2 g - T = m_2 a$. Se obţine (fig. 1.71.R),

$$F = (m_1+m_2)\left(g\mu + \frac{v_2^2-v_1^2}{2d}\right).$$

c) $a' = \frac{R'}{m_2} = \frac{F-F_{f_2}}{m_2} = \frac{\mu m_1 g + (m_1+m_2)a}{m_2}$.

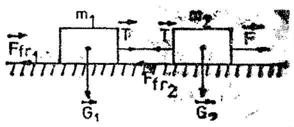

Fig. 1.71.R.

1.72. a) Din sistemul reprezentat în figura 1.72.R, avem:

$$m_1 a = T - F_{f_1} = T - \mu m_1 g \quad \text{şi}$$

$$m_2 a = F' - T - F_{f_2} = F\cos\alpha - T - \mu(m_2 g - F\sin\alpha),$$

de unde se obţine:

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu m_1 g - \mu(m_2 g - F\sin\alpha)}{m_1+m_2}. \tag{1}$$

b) $T = m_1 a + \mu m_1 g$; (2)

c) $T = T(\alpha)$.

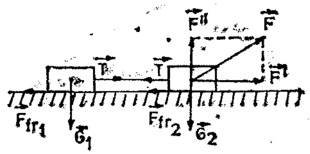

Fig. 1.72.R.

Pentru a calcula valoarea maximă a tensiunii din fir se anulează derivata tensiunii din fir în raport cu α;

$$\frac{dT}{d\alpha} = -F\sin\alpha_0 + \mu F\cos\alpha_0 = 0, \text{ de unde}$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu. \tag{3}$$

Tensiunea maximă se obţine înlocuind relaţiile (3) şi (1) în relaţia (2) şi rezultă:

$$T_{max} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\left[F\sqrt{1+\mu^2} - \mu g(m_1+m_2)\right] + \mu m_1 g.$$

1.73. a) $m_1 g\sin\alpha_1 = m_2 g$; $\sin\alpha_1 = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}5$; $\alpha_1 = 30°$.

b) $m_1 g\sin\alpha_2 + \mu m_1 g\cos\alpha_2 = m_2 g$, sau

$$2\sin\alpha_2 + 0{,}04\cos\alpha_2 = 1, \text{ adică } \alpha_2 = 22°.$$

c) $m_1 g\sin\alpha_3 = \mu m_1 g\cos\alpha_3 + m_3 g$,

$$2\sin\alpha_3 = 0{,}04\cos\alpha_3 + 1; \quad \alpha_3 \simeq 35°.$$

d) $T - m_1 g\sin\alpha_4 - \mu m_1 g\cos\alpha_4 = m_1 a$, $m_2 g - T = m_2 a$,

de unde

$$a = \frac{m_2 g - m_1 g\sin\alpha_4 - \mu m_1 g\cos\alpha_4}{m_1+m_2}; \quad \alpha_4 \simeq 43°.$$

e) $m_1 g \sin\alpha_5 - T - \mu m_1 g \cos\alpha_5 = m_1 a'$,

$$T - m_2 g = m_2 a'$$

de unde, $$a' = \frac{m_1 g \sin\alpha_5 - m_2 g - \mu m_1 g \cos\alpha_5}{m_1 + m_2}.$$

Înlocuind $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$, se obține o ecuație trigonometrică în $\sin\alpha$, unde $\sin\alpha < 1$. Dacă este satisfăcută această inegalitate, atunci este posibilă mișcarea presupusă, în caz contrar nu.

f) $$T = m_2(g - a) = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}(m_1 + m_1 \sin\alpha + \mu m_1 \cos\alpha).$$

Se anulează derivata, $dT/d\alpha = 0$, rezultînd $\operatorname{tg}\alpha = 1/\mu$.
În final, se obține:

$$T_{max} = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2}\left(m_1 + \frac{m_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} + \mu m_1 \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right) =$$

$$= \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}\left(1 + \frac{2\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\right) = 3{,}7\ \text{N}.$$

1.74. a) Izolăm fiecare corp și scriem legea fundamentală a dinamicii: $T_1 - \mu m_1 g = m_1 a'$, $2m_1 g - T_1 = 2m_1 a'$, rezultînd accelerația sistemului $a' = (2-\mu)g/3$ (1).

Inversăm pozițiile celor două corpuri, și analog: $T_2 - 2\mu m_1 g = 2m_1 a''$, $m_1 g - T_2 = m_1 a''$, rezultînd $a'' = (1 - 2\mu)g/3$. (2)

Timpii de mișcare sînt respectiv $t_1 = \sqrt{2h/a'}$; $t_2 = \sqrt{2h/a''}$, iar $t_2 = 2t_1$ astfel încît se obține $a' = 4a''$ (3). Înlocuind (1) și (2) în (3) rezultă $\mu = 2/7$.

b) $T_1 = m_1(a' + \mu g) = 2(1+\mu)m_1 g/3$;

$T_2 = m_1(g - a'') = 2(1+\mu)m_1 g/3$.

Deci tensiunile din fir sînt egale în cele două cazuri.

1.75. a) Cînd se pune pe taler greutatea mai mică (G_1), sistemul are tendința să ridice corpul G_1, deci forța de frecare pe plan este cea indicată în figura 1.75.R. Atunci, la echilibru,

$$mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha = m_0 g + G_1. \quad (1)$$

Cînd se pune pe taler G_2, sistemul are tendința să rotească scripetele în sensul acelor de ceasornic, forța de frecare își schimbă sensul față de cazul anterior, astfel încît:

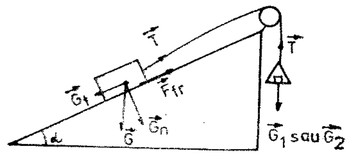

Fig. 1.75.R.

$$mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = m_0 g + G_2. \quad (2)$$

Din ecuațiile (1) și (2) rezultă: $2mg\sin\alpha = 2m_0 g + G_1 + G_2$, astfel încît:

$$G = \frac{2m_0 g + G_1 + G_2}{2\sin\alpha} = 59{,}4\ \text{N}.$$

b) Din sistemul ecuațiilor (1) și (2) se obține: $\mu = \dfrac{G_2 - G_1}{2G\cos\alpha} = 0{,}6$.

c) $$m' = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) - m_0 g + (m_0 + m)a}{g - a} \simeq 5{,}6\ \text{kg}.$$

1.76. a) Firul fiind întins, în momentul în care se imprimă corpului m_2 un impuls, se produce un fenomen similar ciocnirii plastice dintre corpurile m_1 și m_2. Deci: $H = (m_1 + m_2)v_0$, unde v_0 este viteza inițială comună; $F_f = \mu g(m_1 + m_2\cos\alpha)$.

b) Din sistemul de ecuații scrise pentru fiecare corp, avem

$$m_2 g\sin\alpha - \mu m_2 g\cos\alpha - T = m_2 a;\quad T - \mu m_1 g = m_1 a$$

și se obține

$$a = \frac{m_2 g\sin\alpha - \mu g(m_1 + m_2\cos\alpha)}{m_1 + m_2},$$

$$T = m_1(a + \mu g) = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(\sin\alpha - \mu g\cos\alpha + \mu g).$$

c) $$v = v_0 + at = \frac{H}{m_1 + m_2} + at;\ S = v_0 t + \frac{at^2}{2} = \frac{Ht}{m_1 + m_2} + \frac{at^2}{2}.$$

1.77. a) Scriem ecuațiile de mișcare (fig. 1.77. R), $T - mg = ma$ și $(m_1 + \Delta m)g - T = (m + \Delta m)a$, de unde rezultă

$$a = \frac{mg}{2m + \Delta m} = 0{,}24\ \text{m/s}^2,\ T = m(g + a) = 10{,}24\ \text{N};$$

b) $F = 2T = 20{,}48$ N, $F_0 = (2m + \Delta m)g = 20{,}5$ N.

c) $f = \Delta m(g - a) = 0{,}49$ N.

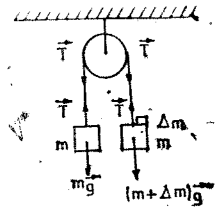

Fig. 1.77.R.

1.78. a) Izolăm fiecare corp şi scriem ecuaţiile de mişcare (fig. 1.78. R),

$$T_1 - m_1 g = m_1 a;\quad T_2 - T_1 - m_3 g \sin\alpha - \mu m_3 g \cos\alpha = m_3 a;$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a.$$

Din acest sistem rezultă a_1, T_1 şi T_2 sub forma:

$$a = \left(\frac{m_2 - m_3 \sin\alpha - \mu m_3 \cos\alpha - m_1}{m_1 + m_2 + m_3}\right) g = 1 \text{m/s}^2,$$

iar

$$T_1 = m_1(g + a) = 11\ N;\quad T_2 = m_2(g - a) = 18\ \text{N}.$$

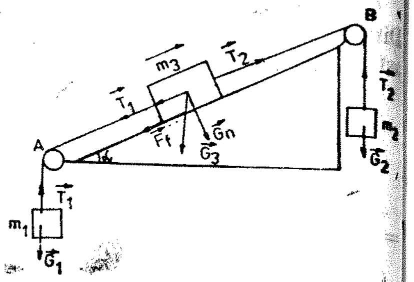

Fig. 1.78.R.

b) $v = at = 4 m/s$.

$$S = at^2/2 = 8\text{m}.$$

c) După tăierea firului, corpurile m_1 şi m_3 se mişcă uniform încetinit cu acceleraţia

$$a' = \frac{R'}{m_1 + m_3} = \frac{F_f + G_t + G_1}{m_1 + m_3} = g\,\frac{m_1 + m_3 \sin\alpha + \mu m_3 \cos\alpha}{m_1 + m_3} = 7{,}93 \text{m/s}^2;$$

$$t_{op} = v/a' = 0{,}22 \text{ s};\quad S_{op} = v^2/2a' = 1\text{m}.$$

d) Acceleraţia cu care vor coborî corpurile m_1 şi m_3 este dată de

$$a'' = \frac{R''}{m_1 + m_3} = \frac{m_1 g + m_3 g \sin\alpha - \mu m_3 g \cos\alpha}{m_1 + m_3} = 7 \text{ m/s}^2.$$

1.79. Ecuaţiile de mişcare ale celor trei corpuri sînt: $m_1 g - T = m_1 a_1$; $m_2 g - 2T = m_2 a_2$; $m_3 g - T = m_3 a_3$. Există o relaţie evidentă între acceleraţiile corpurilor: $a_2 = -(a_1 + a_3)/2$. Din cele patru relaţii rezultă:

$$a_1 = \frac{4m_1 m_3 - 3m_2 m_3 + m_1 m_2}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2}\, g;\quad a_2 = \frac{m_1 m_2 - 4m_1 m_3 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2}\, g;$$

$$a_3 = \frac{4m_1 m_3 - 3m_1 m_2 + m_2 m_3}{4m_1 m_3 + m_2 m_3 + m_1 m_2}\, g.$$

1.80. Se izolează fiecare corp şi se aplică legea fundamentală a dinamicii, rezultînd:

$$T - \mu_1 m_1 g = m_1 a_1; \tag{1}$$

$$T - \mu_2 m_2 g = m_2 a_2; \tag{2}$$

$$m_3 g - 2T = m_3 a_3. \tag{3}$$

Dacă în timpul t, corpurile se deplasează pe distanţele l_1, l_2 şi l_3, atunci $l_3 = (l_1 + l_2)/2$.
Înlocuind $l_1 = a_1 t^2/2$; $l_2 = a_2 t^2/2$; $l_3 = a_3 t^2/2$ se obţine:

$$a_3 = (a_1 + a_2)/2. \tag{4}$$

Din sistemul de ecuaţii (1), (2), (3) şi (4) rezultă:

$$T = \frac{m_1 m_2 m_3 g(2 + \mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2};\quad a_1 = \frac{m_2 m_3 g(2 + \mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} - \mu_1 g;$$

$$a_2 = \frac{m_1 m_3 g(2 + \mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2} - \mu_2 g;$$

$$a_3 = g - \frac{2m_1 m_2 g(2 + \mu_1 + \mu_2)}{m_1 m_3 + m_2 m_3 + 4m_1 m_2}.$$

1.81. Pentru ca masa M_2 să rămînă în repaus trebuie ca greutatea să fie egală cu tensiunea din fir. Atunci: $M_1 a = T = M_2 g$, de unde $a = M_2 g/M_1$. Pentru a găsi forţa F scriem ecuaţia de mişcare ţinînd cont că masele M_1, M_2 şi M se deplasează ca un întreg:

$$F = (M + M_1 + M_2)\, a = (M + M_1 + M_2)\,\frac{M_2}{M_1}\, g.$$

1.82. Notăm cu a_2 acceleraţia masei m_2. Acceleraţia $a_1 = 2a_2$ (masa m_1 face un drum dublu faţă de masa m_2 în acelaşi interval de timp). Ecuaţiile de mişcare ale maselor m_1 şi m_2 sînt:

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin\alpha - \frac{T}{2};\quad m_2 a_2 = -m_2 g + T,$$

unde T este tensiunea din firul de care este legată masa m_2. După rezolvarea sistemului rezultă

$$a_2 = \frac{2m_1 g \sin\alpha - m_2 g}{4m_1 + m_2} = \frac{g}{9} \text{ şi } T = m_2(g + a_2) =$$

$$= 10\, m_2 g/9 = 2{,}17 \text{ N}.$$

Tensiunea din firul care leagă masa m_1 este $T/2 = 1{,}085$ N.

1.83. Masele M şi m se deplasează spre dreapta ca un întreg, deci $(M + m)a = 2T$, unde a este accelerația mişcării orizontale, iar T tensiunea din fir. Corpul m se deplasează vertical, în jos, cu accelerația a_1, dată de ecuația de mişcare $ma_1 = mg - T$. Din figura 1.83.R se vede că la deplasarea ramei spre dreapta cu distanța x, masa m cade pe verticală pe distanța $y = 2x$, de unde $a_1 = 2a$. Atunci $(M + m)a_1 = 4T$ şi $ma_1 = mg - T$, de unde $a_1 = 4mg/(M + 5m)$. Distanța d va fi parcursă în timpul

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a_1}} = \sqrt{\frac{M + 5m}{4m} \cdot \frac{2d}{g}} \simeq 1\text{s}.$$

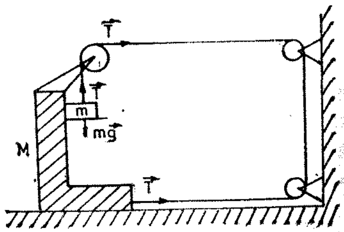

Fig. 1.83.R.

1.84. a) Ecuațiile de mişcare ale corpurilor de mase m_1 şi m_2 sînt: $m_1g - T = m_1a_1$, $m_2g - 2T = m_2a_2$. În cazul scripetelui A este valabilă relația $2T - T = 0$. Rezultă $T = 0$ deci $a_1 = a_2 = g$.

b) Scripeții B şi C se rotesc în sens trigonometric iar scripetele A în sens invers, în cazul cînd corpul cu masa m_1 coboară şi în sens invers la urcarea lui.

1.85. a) $T = (M + m)g = 2T'$, iar $T' = 2f$, astfel încît $f = \left(\frac{m + M}{4}\right) g = 225$ N.

b) $F = mg - f = \frac{1}{4}(3m - M)\, g = 375$ N;

c) $F = 0$; $mg = f = \frac{1}{4}(M + m)g$, de unde rezultă

$$M = 3m = 180 \text{ kg}.$$

1.86. a) Ecuațiile de mişcare pentru cele două mase sînt: $M_1a = T - M_1g + P$, $M_2a = T - M_2g - P$, unde P este forța de apăsare a vopsitorului pe scaun. Din cele două relații rezultă:

$$a = \frac{2P - (M_1 - M_2)g}{M - M_2} = \frac{1}{3}g$$

şi $2T = (M_1 + M_2)(a + g) = \frac{4}{3}(M_1 + M_2)g = 1233$ N.

b) Forța totală suportată de scripete este $N = 2T = 1233$ N.

1.87. a) $\omega_1 = v/R_1 = 25$rad/s; $\omega_2 = v/R_2 = 20$ rad/s.

b) Din relația $\omega = 2\pi n/60$ rezultă

$n_1 = 30\omega_1/\pi = 238{,}7$ rot/min; $n_2 = 30\omega_2/\pi = 190{,}98$ rot/min.

c) $N_1 = l/2\pi R_1 = 200$; $N_2 = l/2\pi R_2 = 159{,}15$.

1.88. a) $v_1 = \omega R$; $v_2 = \omega(R - d)$. Rezolvînd sistemul se obține:

$$R = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} = 25 \text{ cm}; \quad \omega = \frac{v_1 - v_2}{d} = 2 \text{ rad/s}.$$

b) Din relațiile $\omega = 2\pi\nu$; $\omega = 2\pi n/60$ se obține

$$\nu = 0{,}32 \text{ s}^{-1}; \qquad n = 19{,}1 \text{ rot/min}.$$

c) $N = \dfrac{l}{2\pi R_1} = \dfrac{v_1 t}{2\pi R_1} = \dfrac{\omega R_1 t}{2\pi R_1} = \nu t = 9{,}6$ rot.

1.89. $v_1 = \omega\left(R - \frac{d}{2}\right)$ şi $v_0 = \omega\left(R + \frac{d}{2}\right)$, de unde $R = \frac{d}{2} \cdot \frac{v_0 + v_1}{v_0 - v_1} = 6$m.

1.90. Mişcarea fiind plană, poziția punctului M la momentul t se poate reprezenta ca în figura 1.90.R. Sistemul de coordonate $x_1O_1y_1$ se deplasează odată cu centrul de masă O_1 cu viteza v_0. Viteza unghiulară a punctului M al roții este $\omega = v_0/a$, de unde $\varphi = \omega t = v_0t/a$. Coordonatele punctului M față de sistemul $y_1O_1x_1$ sînt

$x_{01} = l \sin\varphi = l \sin\frac{v_0}{a}t$; $y_{01} = l\cos\varphi = l \cos\frac{v_0}{a}t$,

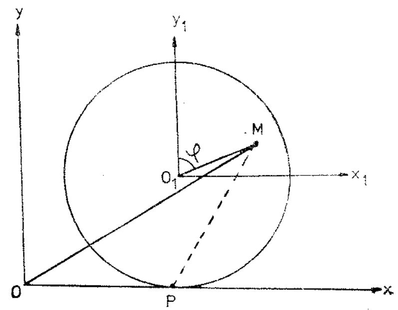

Fig. 1.90.R.

iar față de sistemul yOx;

$$x = x_1 + x_{01} = v_0 t + l \sin\frac{v_0}{a} t; \quad y = y_1 + y_{01} = a + l \cos\frac{v_0}{a} t,$$

iar

$$\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j} = \left(v_0 t + l \sin\frac{v_0}{a} t\right)\vec{i} + \left(a + l\cos\frac{v_0}{a} t\right)\vec{j},$$

unde $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sînt versorii axelor. Viteza punctului M va fi

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \left(v_0 + \frac{v_0}{a} l \cos \frac{v_0}{a} t\right)\vec{i} - l\frac{v_0}{a} \sin \frac{v_0}{a} t\vec{j},$$

iar acceleraţia,

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = -\frac{lv_0^2}{a^2}\left(\sin \frac{v_0}{a} t\vec{i} + \cos \frac{v_0}{a} t\vec{j}\right) = -\frac{v_0^2}{a}\vec{r}_1,$$

unde

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} = \left(\sin \frac{v_0}{a} t\vec{i} + \cos \frac{v_0}{a} t\vec{j}\right).$$

1.91. $H_{max} = y + h_{max}$ unde $y = R(1 - \cos\alpha)$; $h_{max} = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$

astfel încît $H_{max} = R(1 - \cos\alpha) + \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$. (1)

Condiţia de maxim se obţine din anularea derivatei $dH/d\alpha = 0$, rezultînd $\cos\alpha = -gR/v^2$ (2) şi fiind necesar ca $v^2 > Rg$. Înlocuind relaţia (2) în (1) se obţine

$$H_{max} = R\left(1 + \frac{gR}{v^2}\right) + \frac{v^2\left(1 - \frac{g^2R^2}{v^4}\right)}{2g} = R + \frac{v^2}{2g} + \frac{gR^2}{2v^2}.$$

1.92. a) $\omega = \varepsilon t = 3{,}14$ rad/s.

b) $v = \omega r = 0{,}314$ m/s,

c) $a_t = \varepsilon r = 0{,}314$ m/s^2;

d) $a_n = \omega^2 r = 0{,}986$ m/s^2;

e) $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 1{,}03$ m/s^2 :

f) $\sin\alpha = a_t/a = 0{,}305$, $\alpha = 17°46''$

1.93. Ecuaţiile mişcării sînt :

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \qquad (1)$$

$$a = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (2), \quad \text{unde} \quad \omega_0 = \frac{v_0}{R}. \quad (3)$$

Din relaţia (1) şi condiţiile iniţiale ale problemei, avem

$$\omega_1 = \omega_0 + \varepsilon t_1; \qquad \varepsilon = (\omega_1 - \omega_0)/t_1,$$

astfel încît ecuaţiile de mişcare devin :

$$\omega = \frac{v_0}{R} + \frac{(\omega_1 - \omega_0)\, t}{t_1} = \frac{v_0}{R} + \frac{v_1 - v_0}{Rt_1} t = 2 + \frac{t}{2};$$

$$\theta = \frac{v_0}{R} t + \frac{\omega_1 - \omega_0}{2t_1} t^2 = \frac{v_0}{R} t + \frac{v_1 - v_0}{2Rt_1} t^2 = 2t + \frac{t^2}{4}.$$

1.94. a) Legile de mişcare în cele trei regimuri sînt :

$$\omega = \varepsilon t; \ \theta = \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (1); \qquad \theta = \omega t \quad (2);$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t; \quad \theta = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \quad (3).$$

Din condiţia iniţială avem :

$$\omega_1 = \varepsilon t_1; \quad \frac{2\pi n_1}{60} = \varepsilon t_1; \quad \varepsilon = \frac{\pi n_1}{30 t_1} = 0{,}00157 \text{ rad/s}^2.$$

În prima etapă ecuaţiile de mişcare sînt :

$$\omega = 1{,}57 \cdot 10^{-3} t; \qquad \theta = 0{,}785 \cdot 10^{-3} t^2 \quad (1').$$

În faza a doua, mişcarea este uniformă cu viteza unghiulară : $\omega = \varepsilon t_1 = \pi n_1/30$ încît ecuaţia mişcării (2) devine :

$$\theta = \frac{\pi n_1}{30} t_1 = 1{,}57\ t.$$

În etapa a treia mişcarea este uniform încetinită :

$N_3 = \theta/2\pi = \omega_0^2/4\pi\varepsilon$, căci $\theta = \omega_0^2/2\varepsilon$, unde ω_0 este viteza unghiulară la începutul încetinirii egală cu :

$$\omega_0 = \pi n_1/30 = 1{,}57 \text{ rad/s}.$$

Ecuaţiile de mişcare sînt :

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t = \frac{\pi n_1}{30} - \frac{\omega_0^2}{4\pi N_3} t = 1{,}57 - 0{,}78 \cdot 10^{-3} t.$$

$$\theta = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t_2}{2} = \frac{\pi n_1}{30} t - \frac{\omega_0^2}{4\pi N_3} \frac{t^2}{2} = 1{,}57\ t - 0{,}39 \cdot 10^{-3}\, t^2.$$

b) $t_3 = \frac{\omega_0}{\varepsilon}$, unde $\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4\pi N_3}$, încît $t_3 = \frac{4\pi N_3}{\omega_0} = \frac{4\pi N_3}{\frac{\pi n_1}{30}} =$

$$= \frac{120\, N_1}{n_1} = 30 \text{ s}.$$

c) $N = N_1 + N_2 + N_3$, unde

$$N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{\pi n_1}{60 t_1}\, t_1^2 \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{120}; \quad N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{\pi n_1 t_2}{60\pi} = \frac{n_1 t_2}{60};$$

$$N = \frac{n_1 t_1}{120} + \frac{n_1 t_2}{60} + N_3 = 420 \text{ rotații.}$$

1.95. a) $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon\theta_1}$; $\quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon\theta_2}$, unde $\theta_1 = 2\pi N_1$; $\theta_2 = 2\pi N_2$. Din sistemul de ecuații

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - 4\pi N_1 \varepsilon}; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - 4\pi N_2 \varepsilon},$$

rezultă:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{4\pi(N_2 - N_1)}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{N_2\omega_1^2 - N_1\omega_2^2}{N_2 - N_1}}.$$

b) $t_{0p} = \frac{\omega_0}{\varepsilon}$; $\quad \theta_{0p} = \frac{\omega_0^2}{2\varepsilon} = 2\pi N_{0p}$, sau $N_{0p} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon}$.

c) Unghiul total θ a făcut în ultima secundă de mișcare la oprire, sau în prima secundă de mișcare la pornire în mișcarea accelerată este: $\theta = \frac{\varepsilon t^2}{2}$, unde $t = 1\text{s}$, încît

$$\theta = \frac{\varepsilon}{2} = 2\pi N; \quad N = \frac{\varepsilon}{4\pi} = \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{16\pi^2(N_2 - N_1)}.$$

d) Din relația $\omega_2 = \omega_1 - \varepsilon t_{12}$, rezultă $t_{12} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\varepsilon}$.

1.96. a) $\omega_0 = \frac{2\pi n_0}{60} = \frac{\pi n_0}{30}$; $\quad t_{0p} = \frac{\omega_0}{\varepsilon}$ (1). Dar, $N_1 = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\varepsilon}$ (2), încît din relațiile (1) și (2) avem

$$t_{0p} = \frac{4\pi N_1}{\omega_0} = \frac{120\ N_1}{n_0} = 40\text{s}.$$

b) $\varepsilon = \frac{\omega_0^2}{4\pi N_1} = \frac{\pi n_0^2}{3600\ N_1} = 3{,}92 \text{ rad/s}.$

c) $N_2 = \frac{\theta'}{2\pi}$, iar

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\varepsilon\theta'} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\pi\varepsilon N_2} = \sqrt{\omega_0^2 - 4\pi N_2 \frac{\omega_0^2}{4\pi N_1}} =$$

$$= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{N_2}{N_1}} = \frac{\pi n_0}{30}\sqrt{1 - \frac{N_2}{N_1}} = 140 \text{ rad/s}.$$

1.97. Dacă viteza periferică este constantă atunci viteza unghiulară, respectiv turația, crește pe măsură ce sfoara se adună pe cilindru deoarece scade raza de rotație.

a) $\omega = \frac{v}{R} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30}$ cu R raza de rotație egală cu lungimea sforii nerăsucite pe cilindru. În momentul inițial $l = R$, deci

$$n_0 = \frac{30v}{\pi R} = \frac{30v}{\pi l} = \frac{30}{l}.$$

În alt moment, după ce s-au efectuat N răsuciri, turația este:

$$n = \frac{30v}{\pi(l - 2\pi rN)} = \frac{30}{l - 0{,}02\pi N},$$

căci raza de rotație este $l - 2\pi rN$.

b) Turația după 10 răsuciri este:

$$n_{10} = \frac{30v}{\pi(l - 2\pi R \cdot 10)} = \frac{30}{1 - 0{,}2\pi} = 78{,}94 \text{ rot/min}.$$

c) Timpul în care se efectuează a 12-a răsucire, reprezintă tocmai perioada mișcării ce este egală cu:

$$T_{12} = \frac{60}{n_{12}} = \frac{60\pi}{30v}(l - 2\pi RN) = \frac{2\pi}{v}(l - 2\pi RN),$$

cu $N = 12$. Se obține $T_{12} = 0{,}5$ s.

1.98. a) Alungirea jumătății de fir ABM, sub acțiunea tensiunii T_1 este $\Delta l_1 = \text{ABO} - \text{ABM} = 3$ cm. Din legea lui Hooke

$$\Delta l_1 = \frac{T_1 l_0}{ES}, \quad \text{rezultă:}$$

$$T_1 = \frac{ES\,\Delta l_1}{l_0} = 16{,}33 \text{ N}, \quad \text{unde } l_0 = 9 \text{ cm}.$$

$$F = 2T_1\cos\frac{\alpha_1}{2} = \frac{2ES\,\Delta l_1}{l_0}\cos\frac{\alpha_1}{2} = 28{,}25\ \text{N}.$$

b) Dacă triunghiul BOC este dreptunghic atunci

$$BO = BC/\sqrt{2} = 6\sqrt{2}/2,\quad \text{iar}\quad \Delta l_2 = ABO - ABM = 1{,}23\ \text{cm};$$

$$T_2 = ES\,\Delta l_2/l_0 = 6{,}7\ \text{N},\quad F = 2T_2\cos\frac{\alpha_2}{2} = 9{,}45\ \text{N}.$$

c) Energiile acumulate în fir sînt:

$$W_1 = 2F_m\Delta l_1 = 2\cdot\frac{T_1}{2}\Delta l_1 = 0{,}49\text{J};\quad W_2 = 2\cdot\frac{T_2}{2}\,\Delta l_2 = 0{,}0824\ \text{J}.$$

1.99. a) $T = 2\pi\sqrt{m/k} = 2\pi\sqrt{mg/kg} = 2\pi\sqrt{G/kg}$. Prin generalizare, $T = 2\pi\sqrt{R/kg}$, unde R este rezultanta forțelor ce acționează asupra resortului. Cînd sistemul este fix, $R = (m_1 + m_2)g$.

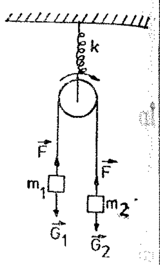

Fig. 1.99.R.

$$T_1 = 2\sqrt{(m_1 + m_2)/k} = 0{,}99\ \text{s}.$$

b) Cînd sistemul se află în mișcare se calculează accelerația și tensiunea F din fir (fig. 1.99.R).

$$m_1 a = F - m_1 g;\qquad m_2 a = m_2 g - F.$$

Se obține:

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2};\quad F = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g.$$

Rezultanta forțelor ce acționează asupra resortului este

$$R = 2F,\quad \text{încît}\quad T_2 = 4\pi\sqrt{\frac{m_1 m_2 g}{k(m_1 + m_2)}} = 3{,}08\ \text{s}.$$

1.100. Dacă constanta elastică a firului este k, perioada

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + m_1}{k}} = \frac{\pi}{3},$$

de unde $k = 36(m + m_1)$. În poziția cu alungirea maximă A, $kA = (m_2 - m_1)g$, de unde $A = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{36(m + m_1)} = 21{,}8$ cm.

1.101. a) Cînd scripetele este ținut fix (fig. 1.101.a.R.) tensiunea din fir este $T_1 = (m_1 + m_2)g$, iar alungirea firului $\Delta l_1 = \dfrac{T_1}{k} = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{k}$.

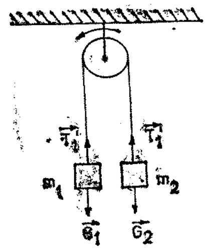

Fig. 1.101.a.R

Cînd sistemul este în mișcare, din sistemul de ecuații $m_1 g - T_1' = m_1 a$, $T_1' - m_2 g = m_2 a$, se obține

$$T_1' = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2},\ \text{iar alungirea}\ \Delta l_2 = \frac{T_1'}{k} = \frac{2m_1 m_2 g}{k(m_1 + m_2)}.$$

Raportul alungirilor va fi

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{(m_1 + m_2)^2}{2m_1 m_2} = \frac{9}{4}.$$

b) Dacă sistemul este ținut în repaus (fig. 1.101.b.R)

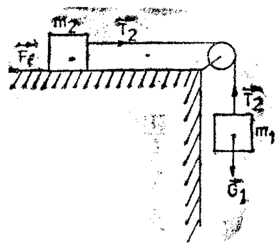

Fig. 1.101.b.R.

$$T_1 = m_1 g,\quad \text{iar}\quad \Delta h = \frac{m_1 g}{k}.$$

Cînd sistemul este în mișcare, din sistemul

$$T_2 - \mu m_2 g = m_2 a,\quad m_1 g - k = m_1 a,$$

rezultă $T_2 = \dfrac{m_1 m_2(1 + \mu)g}{m_1 + m_2}$, iar alungirea va fi:

$$\Delta l_2 = \frac{m_1 m_2(1 + \mu)g}{k(m_1 + m_2)}.$$

Raportul alungirilor va fi: $\dfrac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2(1 + \mu)} = \dfrac{5}{2}$.

1.102. a) $T_A = m\,4\pi^2\nu^2 l - mg = 7{,}89\nu^2 - 2$;

$T_B = F_{cf} - mg\cos\alpha = m4\pi^2\nu^2 l - mg\cos\alpha = 7{,}89\ \nu^2 - 1$;

$$T_C = m4\pi^2\nu^2 l = 7{,}89\ \nu^2;$$

$$T_D = F_{cf} + mg\cos\beta = m4\pi^2\nu^2 l + mg\cos\beta = 7{,}89\nu^2 + 1;$$

$$T_E = m4\pi^2\nu^2 l + mg = 7{,}89\ \nu^2 + 2.$$

b) Firul se va rupe în punctul E, deoarece pentru ν dat, acolo tensiunea are valoarea maximă. Turația minimă pentru ca firul să se rupă, rezultă din condiția

$$T = mg + m\cdot\frac{4\pi^2 n^2 l}{3600},\quad \text{de unde}\quad n = \sqrt{\frac{(T - mg)3600}{4\pi^2 ml}} = 191\ \text{rot/min}.$$

c) Viteza liniară a corpului, va fi:

$$v_0 = \omega l = \frac{2\pi n\cdot l}{60} = 20\,\text{m/s},\qquad D = v_0 t = v_0\sqrt{2(h_0 - l)/g} = 15{,}5\,\text{m}.$$

1.103. a) Forțele de tracțiune sînt (fig. 1.103.R):

$$F_{AB} = F_f + F_a = \mu mg + ma = \mu mg + m\frac{v_2^2 - v_1^2}{2l_1} = 2750\ \text{N și}$$

$F_{BC} = F_f = \mu mg = 2000$ N

b) $\omega = v_2/R = \pi v_2/l_2 = 0{,}2$ rad/s;

$F_{cf} = m\omega^2 R = m\omega^2 l_2/\pi = 4000$ N.

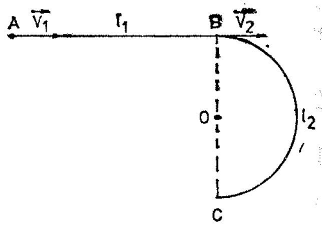

Fig. 1.103.R.

c) $t = t_{AB} + t_{BC} = \dfrac{v_2 - v_1}{a} + \dfrac{l_2}{v_2} = \dfrac{2l_1}{v_1 + v_2} + \dfrac{l_2}{v_2} = 29$ s.

d) $F_{cf} = F$; $mv^2/R = \mu mg$; $v_{al} = \sqrt{\mu gR} = \sqrt{\mu g l_2/\pi} = 14{,}14$ m/s

e) $M_F = M_G$; $F_{cf}\cdot h = G\cdot\dfrac{d}{2}$; $\dfrac{mv^2}{R}\cdot h = mg\dfrac{d}{2}$;

$$v_2 = \sqrt{\frac{gdR}{2h}} = 31{,}62\ \text{m/s}.$$

1.104. a) Condiția de mișcare este (fig. 1.104.R): $\text{tg}\,\alpha = m\omega^2 r/mg$, unde $r = l\sin\alpha$. Deci

$$\omega = \sqrt{g/l\cos\alpha}\quad \text{și}\quad T = 2\pi\sqrt{l\cos\alpha/g} = 1\text{s}.$$

b) $L = \dfrac{mv^2}{2} + mgh$, unde $v = \omega r = \omega l\sin\alpha$ și $h = l(1 - \cos\alpha)$. Deci, $L = 9{,}6$ J.

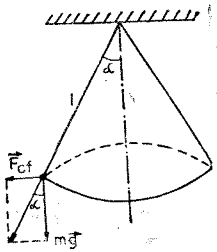

Fig. 1.104.R.

1.105. a) Din condiția de echilibru a corpului de masă m_2 avem

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{\omega^2(a + l\sin\alpha)}{g},\ \text{deci}\quad \omega = \sqrt{\frac{g\,\text{tg}\,\alpha}{a + l\sin\alpha}}.$$

b) Pentru ca m_1 să nu se deplaseze spre exterior, este necesar ca $m_1\omega^2 x \leqslant \mu m_1 g + \dfrac{m_2 g}{\cos\alpha}$.

Pentru ca m_1 să nu se deplaseze spre axa de rotație este necesar ca

$$m_1\omega^2 x + \mu m_1 g \geqslant m_2 g/\cos\alpha,$$

de unde rezultă:

$$\frac{m_2 g - \mu m_1 g\cos\alpha}{m_1\omega^2\cos\alpha} \leqslant x \leqslant \frac{m_2 g + \mu m_1 g\cos\alpha}{m_1\omega^2\cos\alpha}.$$

c) $T = \dfrac{m_2 g}{\cos\alpha}$;

$$F_{ap} = T\sqrt{2[1 + \cos(90 + \alpha)]} = \frac{m_2 g}{\cos\alpha}\sqrt{2(1 + \sin\alpha)}.$$

1.106. $\text{tg}\,\beta = F_{cf}/G = m\omega^2 R/mg = \omega^2 R/g$, unde $R = r + l\sin\alpha$ și se obține: $\omega = \sqrt{g\,\text{tg}\,\alpha/(r + l\sin\alpha)} = 8\text{s}^{-1}$.

1.107. Deraparea autovehiculului se poate produce în exterior sau în interior. Vom determina mai întîi condiția de excludere a derapării spre exterior.

a) Din figura 1.107.a.R observăm că pentru a nu avea loc alunecare spre exterior, ceea ce se poate întîmpla la viteză mare, este necesar ca forța de frecare F_f să fie mai mare decît componenta tangențială F_t a forței rezultante a forței centrifuge și greutății, $F_f \geqslant F_t$ (1), unde $F_f = \mu F_n = \mu F_R\cos(\beta - \alpha)$ și $F_t = F_R\sin(\beta - \alpha)$. Unghiul β este dat de relația $\text{tg}\,\beta = F_{cf}/G = v^2/gR$.

Înlocuind expresiile lui F_f și F_t în relația (1) se obține

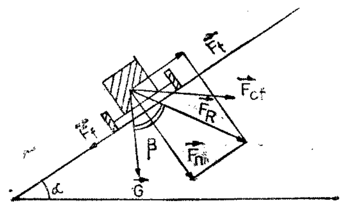

Fig. 1.107.a.R.

$$\mu \geqslant \text{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\beta\,\text{tg}\,\alpha}.$$

Înlocuind $\text{tg}\,\beta = v^2/gR$ rezultă: $v \leqslant \sqrt{\dfrac{gR(\mu + \text{tg}\,\alpha)}{(1 - \mu\,\text{tg}\,\alpha)}}$. Deoarece $\mu = \text{tg}\,\varphi$ se obține valoarea vitezei maxime pentru care nu există alunecare spre exterior $v_{max} = \sqrt{gR\,\text{tg}(\alpha + \varphi)}$.

b) În cazul unei viteze mici este posibil ca rezultanta dintre greutatea autovehiculului și forța centrifugă să aibă o componentă în lungul planului orientată spre interior (fig. 1.107.b.R). Este necesar ca și în cazul precedent ca $F_f \geqslant F_t$, unde $F_t = F\sin(\alpha - \beta)$ și $F_f = \mu F\cos(\alpha - \beta)$.

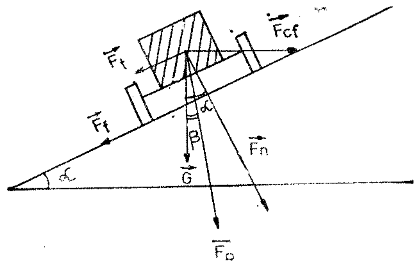

Fig. 1.107.b.R.

Condiția de nealunecare spre interior este deci $\mu \geqslant \mathrm{tg}(\beta - \alpha)$. Înlocuind din nou tg β se obține : $v \geqslant \sqrt{gR(\mathrm{tg}\alpha - \mu)/(1 + \mu\,\mathrm{tg}\alpha)}$. Viteza minimă va fi $v_{min} = \sqrt{gR\,\mathrm{tg}(\alpha - \varphi)}$.

1.3. Energia mecanică a punctului material și a sistemului de puncte materiale

1.108. $P = F \cdot v = mav$, de unde $a = P/mv = 7{,}2$ m/s².

1.109. Pentru deplasarea uniformă pe planul orizontal, $P_1 = F_t\, v$, de unde : $F_{tr} = P_1/v$. Pentru deplasarea pe planul înclinat $P = (mg \sin\theta + F_r)v$, de unde

$$\sin\theta_{max} = \frac{P - P_1}{mgv} = 0{,}235.$$

1.110. Legea conservării energiei se scrie :

$$mgh = \frac{M}{2}v^2 + \frac{M}{2}v^2 + \frac{m}{2}v^2, \quad \text{de unde}$$

$$g = \frac{2M + m}{2mh}v^2 = 9{,}81 \text{ m/s}^2.$$

1.111. În figura 1.111.R este prezentat corpul pe plan. Lucrul mecanic al forței F_2 folosește la învingerea forței de frecare a componentei tangențiale a greutății și pentru crearea energiei cinetice :

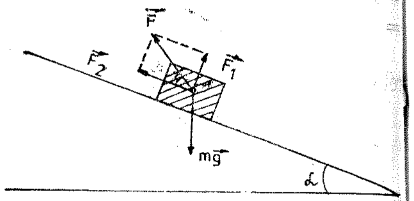

Fig. 1.111.R.

$$F \cdot l \cos\beta = \mu(mg\cos\alpha - F\sin\beta)\,l + mgl\sin\alpha + \frac{mv^2}{2},$$

de unde

$$l = \frac{mv^2}{2[F(\cos\beta + \mu\sin\beta) - mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)]} = 0{,}32 \text{ m}.$$

1.112. a) $a_1 = \dfrac{v_1}{t_1} = 1$ m/s²; $\quad F_{tr.1} = F_{f1} + ma_1 = \mu m_1 g + m_1 a_1 = 4000$ N;

$a_2 = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2} = 0{,}5$ m/s²; $F_{tr.2} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + ma_2 = 4554$ N.

b) $l_1 = a_1 t_1^2/2 = 50$ m; $\quad l_2 = (v_2^2 - v_1^2)/2a_2 = 300$ m.

$$L_t = F_{tr.1} l_1 + F_{tr.2} l_2 = 1566{,}2 \text{ kJ}.$$

c) $P_{m_1} = F_{tr.1} v_1 = 40$ kW; $\quad P_{m_2} = F_{tr.2} \cdot (v_2 + v_1)/2 = 68{,}3$ kW.

1.113. a) Conservarea energiei în punctele A și B (fig. 1.113.R) conduce la

$$mgh + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} \quad \text{de unde}$$

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 - 2gh} = 32 \text{ m/s}.$$

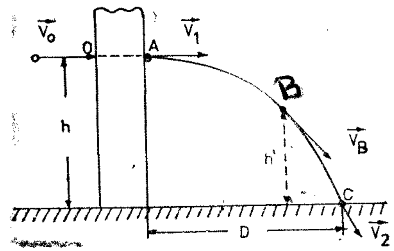

Fig. 1.113.R.

Folosim legea variației energiei cinetice între O și A. $m(v_0^2 - v_1^2)/2 = F_m \cdot d$, de unde rezultă $F_m = m(v_0^2 - v_1^2)/2d = 11{,}5$ N.

b) La aruncarea pe orizontală $D = v_1 t_{AC} = v_1\sqrt{2h/g} = 45{,}2$m.

c) Considerăm că în punctul B avem $E_c = 10\,E_p$ sau $mv_B^2/2 = 10\,mgh$ (1). Pentru calculul lui v_B, folosim din nou legea conservării energiei și obținem $v_B = \sqrt{v_1^2 + 2g(h - h')}$ (2). Înlocuind relația (2) în (1) avem : $h' = (v_1^2 + 2gh)/22\,g = 5{,}56$ m. Pe de altă parte $h - h' = gt^2/2$;

$$t = \sqrt{2(h - h')/g} = 0{,}94 \text{ s}.$$

1.114. Masa totală a cablului este $M = mL$. La momentul inițial centrul de masă al porțiunii de care se trage se află la distanța $L/4$ de axa scripetelui, iar la sfîrșit la distanța $L/2$. Variația energiei potențiale a cablului este egală $\Delta W = mLg\dfrac{L}{2} - mLg\dfrac{L}{4} = \dfrac{1}{4}mL^2g$.

Aceasta va fi egală cu variația energiei cinetice :

$$Mv^2/2 = mLv^2/2 = mL^2g/4 \quad \text{de unde} \quad v = \sqrt{gL/2}.$$

1.115. Forțele de frecare sînt : $F_1 = \mu px\cos\alpha$ pe planul BC și $F_2 = \mu p(l - x)$ pe planul AB. Lucrul mecanic efectuat este

$$L = \int_0^l (F_1 + F_2 + px\sin\alpha)\,dx = p\int_0^l [(\mu\cos\alpha - \mu + \sin\alpha)\,x + \mu l]\,dx =$$

$$= pl^2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha + \mu)/2.$$

1.116. a) $T_B = F_{cf} + G = \frac{mv_B^2}{l_1} + mg\cos\alpha$ (1).

Viteza v_B rezultă din conservarea energiei scrisă în A și B (fig. 1.116.R).

$$mgl_1(1-\cos\alpha_0) = \frac{mv_B^2}{2} + mgl_1(1-\cos\alpha),$$

de unde $v_B^2 = 2gl_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0)$ (2). Înlocuind relația (2) în (1) se obține:

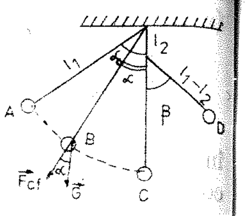

Fig. 1.116.R.

$$T_B = mg(3\cos\alpha - 2\cos\alpha_0) = 10(3\cos\alpha - 1).$$

b) Conservarea energiei în punctele A și D conduce la

$$mgl_1(1-\cos\alpha_0) = mg(l_1 - l_2)(1-\cos\beta), \text{ sau}$$

$$\cos\beta = \frac{l_1\cos\alpha_0 - l_2}{l_1 - l_2} = 0{,}375;\ \beta = 68°.$$

c) $T_A = mg\cos\alpha_0$; $T_D = mg\cos\beta$: $\frac{T_A}{T_D} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta} = 1{,}33.$

1.117. a) Din legea conservării energiei mecanice în punctele A și B (fig. 1.117.R) avem $\frac{mv_A^2}{2} = mgh_B$, unde $h_B = l(1-\cos\alpha)$. Se obține $v_A = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$, încît

$$\cos\alpha = 1 - \frac{v_A^2}{2g} = 0{,}2;\ \alpha = 78°.$$

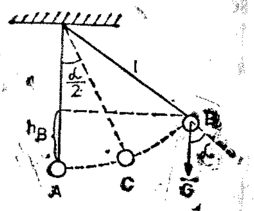

Fig. 1.117.R.

b) Energia potențială în punctul C este:

$$(E_p)_C = mgh_C = mgl\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}115 \text{ J}.$$

Energia cinetică în același punct este:

c) $E_C = \frac{1}{2}E_p$; $\frac{mv_0^2}{2} - mgl(1-\cos\gamma) = \frac{1}{4}mgl(1-\cos\gamma)$,

de unde

$$\cos\gamma = 1 - \frac{2v_0^2}{5gl} = 0{,}36;\ \gamma = 69°.$$

d) Tensiunea din fir în punctul B este egală cu componenta greutății în lungul firului $T_B = mg\cos\alpha = 1$ N.

1.118. a) Pe orizontală $P = F_{tr}\cdot v = (\mu mg + ma)v$ de unde

$$a = \frac{\frac{P}{v} - \mu mg}{m} = \frac{P}{mv} - \mu g. \qquad (1)$$

Pe măsură ce v crește, accelerația scade. Pe planul înclinat, avem: $P = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + ma)v$, de unde

$$a = \frac{P}{mV} - g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \qquad (2)$$

Analog, accelerația scade prin creșterea vitezei.

b) Viteza maximă se obține atunci cînd accelerația se anulează, în continuare mișcarea fiind uniformă. Din relațiile (1) și (2) făcînd $a = 0$, se obține: — pe orizontală: $v_{max} = \frac{P}{\mu mg}$; — pe planul înclinat: $v_{max} = \frac{P}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

1.119. a) Conform figurii 1.119.R.,

$$L_t = (F_{f_1} + G_{t_2} + F_{f_2})\,l = (\mu_1 m_1 g + m_2 g\sin\alpha + \mu_2 m_2 g\cos\alpha)\cdot$$

$$\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = 76{,}57 \text{ kJ}.$$

b) $L'_t = F'_{tr}\cdot l$, unde $F'_{tr} = \mu_1 m_1 g + m_2 g\sin\alpha + \mu_2 m_2 g\cos\alpha + (m_1 + m_2)a$, iar $a = \frac{2l}{t^2} = \frac{2h}{t^2\sin\alpha} = 0{,}28$ m/s². Înlocuind, se obține:

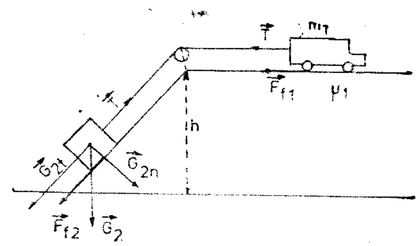

Fig. 1.119.R.

$$L'_t = \left[(\mu_1 m_1 g + m_2 g\sin\alpha + \mu_2 m_2 g\cos\alpha + (m_1 + m_2)\frac{2h}{t^2\sin\alpha}\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{h}{\sin\alpha} = 86{,}17 \text{ kJ}.$$

c) Pentru buștean, avem $T - m_2 g\sin\alpha - \mu_2 m_2 g\cos\alpha = m_2 a$, de unde se obține $T = m_2(a + g\sin\alpha + \mu_2 g\cos\alpha) = 3505$ N.

d) $P_m = F'_{tr}\cdot v_m$, unde $v_m = \frac{0 + v}{2} = \frac{at}{2} = 1{,}4$ m/s. Se obține $P_m = 8444{,}8$ W.

e) $P_{max} = F'_{tr}\cdot v_{max} = F'_{tr}\cdot at = 16{,}889$ kW.

1.120. Din momentul în care centrul sferei se află pe aceeaşi verticală cu marginea platformei şi pînă în momentul desprinderii de aceasta, centrul sferei descrie un arc de cerc de rază R cu centrul în punctul de contact (fig. 1.120.R). Notînd cu u viteza centrului sferei în momentul desprinderii teorema conservării energiei se scrie :

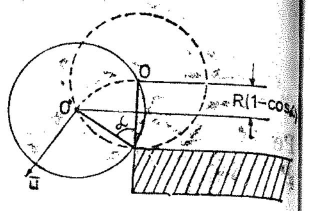

Fig. 1.120.R.

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + mgR(1 - \cos\alpha)\ (1),$$

unde m este masa sferei.

Condiţia de mişcare pe cerc este $mu^2/R = mg\cos\alpha$ (2).

Din (1) şi (2) $\cos\alpha = \frac{1}{3}\left(\frac{v_0^2}{gR} + 2\right)$ şi $u = \sqrt{\frac{1}{3}(v_0^2 + 2gR)}$.

Deoarece $\cos\alpha \leqslant 1$, trebuie ca $v_0^2 \leqslant gR$. Dacă $v_0^2 > gR$ desprinderea are loc chiar în momentul în care centrul sferei se află pe aceeaşi verticală cu marginea platformei şi proiecţia orizontală a vitezei sferei în momentul căderii pe podea va fi nulă.

Dacă $v_p^2 \leqslant gR$, $u_{criz.} = v_0 - u\cos\alpha = v_0 - \frac{1}{3Rg}\sqrt{\frac{1}{3}(v_0^2+2Rg)^3}$.

1.121. Dacă cubul începe să alunece energia sa potenţială scade fiind consumată sub formă de lucru mecanic de învingere a forţelor de frecare. Înălţimea centrului de greutate al cubului fiind $h = \frac{l}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$, unde l este latura cubului, iar distanţa muchiei inferioare faţă de perete $x = l\cos\theta$ (fig. 1.121.R), pentru o variaţie a unghiului θ cu $d\theta$, variaţia energiei potenţiale este $dE_p = -mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)d\theta$, iar lucrul mecanic împotriva forţei de frecare, $dL = -\mu Nl\sin\theta\, d\theta$,

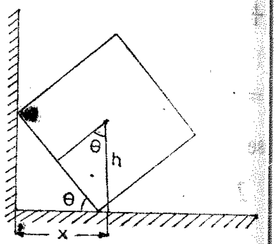

Fig. 1.121.R.

unde N este forţa de apăsare a cubului pe planul orizontal. Dacă cubul rămîne în repaus, $N = mg$ şi

$$mg\frac{l}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \mu mgl\sin\theta,\ \text{de unde}\ \mu = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\theta}{2\mathrm{tg}\,\theta}.$$

Verificăm rezultatul. Pentru $\theta \to 0$, $\mu \to \infty$, adică este necesară o frecare foarte mare pentru a opri cubul din alunecare. Pentru $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\mu = \frac{1-1}{2} = 0$. Este suficientă o forţă foarte mică pentru a face cubul să alunece. Dacă $\mu = 1$, $\mathrm{tg}\,\theta = 1/3$ şi $\theta = 18°30'$.

1.122. Pentru ca să parcurgă curba fără a părăsi pista, trebuie ca în punctul superior, greutatea căruciorului să fie egală cu forţa centrifugă, adică $v^2/R = g$, iar din legea conservării energiei,

$$mgH = \frac{mv^2}{2} + mg\,2R,\quad \text{rezultă că}\ H = \frac{5}{2}R.$$

1.123. $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G} = \frac{m\omega^2(l_1 + l_2\sin\alpha)}{mg}$, relaţie din care se obţine unghiul α.

b) $$E_t = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{m\omega^2(l_1 + l_2\sin\alpha)^2}{2} + mg\,l_2(1 - \cos\alpha).$$

c) Tensiunea în fir este : $T = R = \sqrt{G^2 + F_{cf}^2}$, iar $\Delta l = l_2\frac{R}{ES} = \frac{l_2\sqrt{G^2 + F_{cf}^2}}{ES}$, unde $F_{cf} = m\omega^2(l_1 + l_2\sin\alpha)$.

1.124. a) Notăm cu α unghiul făcut de rază în punctul în care corpul părăseşte sfera cu diametrul vertical (fig. 1.124.R). În acest punct forţa de apăsare a corpului pe sferă este nulă, astfel că proiecţia greutăţii pe direcţia razei este egală cu forţa centrifugă, adică $v^2/R = g\cos\alpha$. Conform legii conservării energiei, $mv^2/2 = mgR(1 - \cos\alpha)$, de unde $\cos\alpha = 2/3$.

Corpul parcurge arcul $S = \alpha R = 0{,}85\ R$.

b) Viteza particulei în direcţia orizontală în punctul B este $v_x = v\cos\varphi$ şi în direcţie verticală $v_y = v\sin\varphi + gt$. Scriind legea de mişcare pe verticală

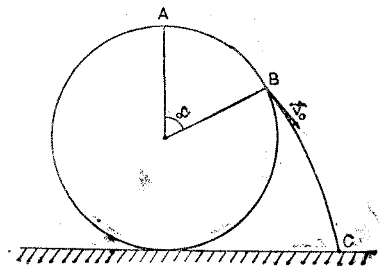

Fig. 1.124.R.

$$y = vt\sin\varphi + \frac{gt^2}{2},\ \text{unde}\ y = R(1 + \cos\varphi),$$

se obţine valoarea timpului, care înlocuit în legea de mişcare dă $x = \frac{4}{27}(\sqrt{23} - \sqrt{5})$. Distanţa parcursă faţă de A este $d = R\sin\varphi + x \simeq 1{,}18\ R$.

1.125. Considerăm că segmentul AB nu este înlăturat. În punctul C (fig. 1.125.R) este necesar ca $mg = mv^2/R$. Din legea conservării energiei $mgh = mg\cdot 2R + \frac{mv^2}{2}$. Din cele două ecuații rezultă distanța de la care se lasă să cadă corpul $h = \frac{5}{2}R$. Viteza în punctul A se determină scriind din nou legea conservării energiei:

$$mg\frac{5}{2}R = \frac{mv_A^2}{2} + mgR(1+\cos\alpha).$$

Viteza în punctul A face unghiul α cu orizontala și va străbate distanța $AB = (v_A^2\sin 2\alpha)/g$. Dar $AB = 2R\sin\alpha$. Din cele două relații rezultă: $v_A^2 = Rg/\cos\alpha$. Introducînd viteza în ecuația de conservare se obține: $mg\frac{5}{2}R = \frac{mgR}{2\cos\alpha} + mgR + mgR\cos\alpha$. Deci, $\cos\alpha = \frac{3\pm1}{4}$,

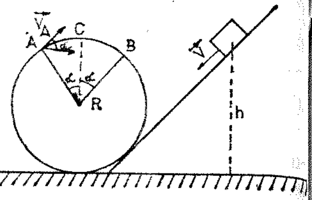

Fig. 1.125.R.

de unde $\alpha_1 = 0$ și $\alpha_2 = 60°$. Dacă $\alpha < 60°$ corpul va cădea în interiorul cercului, iar dacă $\alpha > 60°$ el va ieși afară.

1.126. a) $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu g d} = 10{,}58$ m/s.

b) Energia cinetică a corpului se transformă în energie de deformare a barei

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{ES(\Delta l)^2}{2l_0},\ \text{de unde}\ \Delta l = v_1\sqrt{\frac{ml_0}{ES}} = 0{,}1\text{m}.$$

c) $F_{max} = k(\Delta l) = ES\,\Delta l/l_0 = 10^4$ N.

1.127. a) Din legea lui Hooke $\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\cdot\frac{F_{tr}}{S}$ scrisă pentru cele două cazuri, rezultă

$$\frac{(\Delta l)_u}{(\Delta l)_a} = \frac{(F_{tr})_u}{(F_{tr})_a} = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 0{,}75.$$

b) Energia de deformare este $E_{def} = \frac{k(\Delta l)^2}{2}$, încît

$$\frac{(E_{def})_u}{(E_{def})_a} = \frac{(\Delta l)_u^2}{(\Delta l)_a^2} = 0{,}556.$$

c) $F_{min} = ky_{min} = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha$

$$(E_{def})_{min} = \frac{ky_{min}^2}{2} = \frac{[mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)]^2}{2k} = \frac{l_0[mg(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]^2}{2ES} = 0{,}68\ \text{J},$$

deoarece $k = \frac{ES}{l_0}$.

1.128. Forța este $F = kx$, unde $k = \frac{mg}{x_0}$ și x rezultă din legea conservării energiei:

$$mgh = \frac{kx^2}{2} - mgh;\ kx^2 - 2mgx - 2mgh = 0;$$

$$\frac{mg}{x_0}x^2 - 2mgx - 2mgh = 0;\ x^2 - 2xx_0 - 2x_0h = 0;$$

$$x = x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + 2x_0h};$$

$$F = kx = \frac{mg}{x_0}(\sqrt{x_0^2 + 2x_0h} + x_0) = mg\left(\sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}} + 1\right) = 6{,}48\text{kN}.$$

1.129. În orice moment de timp, mișcarea corpului poate fi descompusă în mișcarea de-a lungul axei cilindrului și cea din planul perpendicular pe axa cilindrului.

Condiția ca în timpul mișcării corpul să nu părăsească suprafața interioară a cilindrului se reduce la condiția ca proiecția mișcării în planul perpendicular pe axa cilindrului să fie circulară, adică

$$\frac{mv^2}{R} - mg\cos\alpha\cos\beta \geq 0 \qquad (1)$$

unde β este unghiul făcut de direcția razei cu direcția lui AC la un moment de timp oarecare (fig. 1.129.R), iar v este viteza corpului tangentă la cerc în același moment de timp.

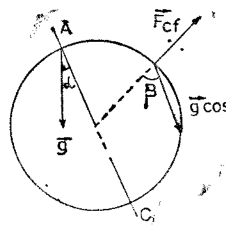

Fig. 1.129.R.

Legătura dintre viteza v pe cerc la un moment de timp oarecare și viteza inițială v_0 rezultă din legea conservării energiei:

$$\frac{m(v^2 + v_0^2\cos^2\varphi)}{2} + mgR\cos\alpha\cos\beta = m\frac{v_0^2}{2} + mgR\cos\alpha. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă condiţia

$$v_0^2 \geqslant \frac{gR\cos\alpha}{\sin^2\varphi}(3\cos\beta - 2). \qquad (3)$$

Relaţia (3) trebuie să fie adevărată pentru orice $\beta \in [0, 2\pi]$ astfel că trebuie îndeplinită condiţia

$$v_0^2 \geqslant \frac{Rg\cos\alpha}{\sin^2\varphi}.$$

1.130. Corpul inferior se va ridica dacă forţa elastică este mai mare decît greutatea m_2g, $kx_2 \geqslant m_2g$. În figura 1.130.R în poziţia a, resortul este în starea de echilibru. Pentru a se destinde cu x_2 (poziţia c) resortul trebuie comprimat cu x_1 (poziţia b). Legea conservării energiei se scrie:

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + m_1g(x_1 + x_2).$$

Cum la limită $kx_2 = m_2g$, se poate deduce:

$$x_1 = \frac{m_1g \pm (m_1g + m_2g)}{k}. \text{ Deci,}$$

$$x_1 = \frac{2m_1g + m_2g}{k}.$$

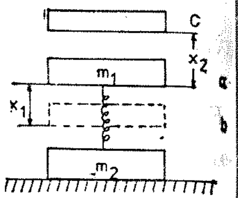

Fig. 1.130.R.

Comprimarea x_1 poate fi realizată dacă forţa F ce se aplică masei m_1 verifică relaţia $F + m_1g = kx_1$ sau $F > m_1g + m_2g$.

1.131. Cînd al doilea corp este împins în jos energia iniţială, formată din energia cinetică $\frac{m_1 + m_2}{2}v^2$ şi cea potenţială m_2gh_1 este consumată pentru învingerea forţei de frecare, adică

$$\frac{m_1 + m_2}{2}v^2 + m_2gh_1 = \mu m_1gh_1. \qquad (1)$$

În al doilea caz,

$$\frac{m_1 + m_2}{2}v^2 = m_2gh_2 + \mu m_1gh_2. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2)

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{h_1 + h_2}{h_1 - h_2} = 0{,}6.$$

1.132. a) Acceleraţia cu care corpul coboară planul înclinat este $a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Astfel, viteza atinsă la baza planului înclinat este:

$$v = \sqrt{2a_cd} = 28{,}5 \text{ m/s}.$$

b) Pe planul orizontal corpul se deplasează sub influenţa forţei de frecare deci are acceleraţia: $a = \mu g$. Viteza corpului la intrarea în regiunea peretelui semicilindric este

$$v_1 = \sqrt{v^2 - 2al} = 28{,}1 \text{ m/s},$$

iar timpul parcurs pe planul orizontal $t = (v - v_1)/a = 0{,}4$ s. Timpul total va fi $t_{tot} = t_c + t = 7{,}4$ s.

c) În interiorul peretelui semicilindric corpul efectuează un lucru mecanic pentru învingerea forţelor de frecare ceea ce duce la scăderea energiei sale cinetice E_c. După ce parcurge elementul de circumferinţă Δr scăderea energiei este:

$$\Delta E_c = -\frac{mv^2}{R}\mu_2\Delta r = -E_c\frac{2\mu_2\Delta r}{R},$$

unde E_c este energia cinetică a corpului la intrarea în Δr, iar R este raza peretelui semicircular. Prin integrare se obţine:

$$\int_{E_{c0}}^{E_{cf}}\frac{dE_c}{E_c} = -\frac{2\mu_2}{R}\int_0^l dr, \text{ unde } E_{c0}$$

este energia cu care corpul pătrunde în peretele semicilindric, iar E_{cf} energia cu care el iese şi l este lungimea semicercului $l = \pi R$. Se obţine:

$$\ln\frac{E_{cf}}{E_{c0}} = -2\pi\mu_2, \text{ sau } \frac{E_{cf}}{E_{c0}} = \frac{v_f^2}{v_1^2} = e^{-2\pi\mu_2}.$$

Rezultă $v_f = v_i r^{-\pi\mu_2} \cong 14$ m/s.

1.4. Impulsul mecanic

1.133. În punctul de înălţime maximă viteza rachetei este nulă. Variaţia impulsului total al fragmentelor rachetei este neglijabilă, ţinînd seama că acţiunea forţelor externe (forţele de gravitaţie) este mică în timpul foarte scurt al exploziei. Deci

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 + m\vec{v}_3 = 0.$$

Această relaţie este posibilă numai dacă vectorii $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ se află în acelaşi plan.

1.134. a) $E_p = mgh$. Masa rezultă din legea de variaţie a impulsului $\Delta H = m\Delta v = mg\,\Delta t$; iar înălţimea din relaţia Galilei $v = \sqrt{2gh}$.

În final,

$$E_p = \frac{\Delta H}{g\Delta t}\cdot g\cdot\frac{v^2}{2g} = \frac{\Delta H v^2}{2g\,\Delta t} = 2500 \text{ J}.$$

b) $mv'^2/2 = mgh'$, unde $v' = \sqrt{2g(h-h')}$;

rezultînd $h' = h/2 = v^2/4g = 62{,}5$ m.

c) Din legea variației energiei cinetice $mv^2/2 = F_r d$, avem

$$F_r = \Delta H v^2/2gd\;\Delta t = 41{,}6 \text{ kN}.$$

1.135. Conform legii a doua a lui Newton variația impulsului sistemului *tun-proiectil* pe durata τ a șocului trebuie să fie egală cu impulsul forței ce acționează asupra sistemului. Pe orizontală avem:

$$mv_0\cos\alpha - Mv_1 = F_{fr}\tau.$$

Pe verticală se scrie: $mv_0\sin\alpha = N\tau - (Mg + mg)\tau$, unde $N\tau$ este impulsul forțelor de reacțiune ale suprafeței orizontale, iar $(Mg + mg)\tau$ este impulsul forțelor de gravitație. Ținînd seama că $F_{fr} = \mu N$ se obține:

$$v_1 = \frac{m}{M}v_0\cos\alpha - \mu\frac{m}{M}v_0\sin\alpha - \mu\frac{M+m}{M}g\tau,$$

sau deoarece $g\tau \ll v_0$, $v_1 \cong \dfrac{m}{M}v_0(\cos\alpha - \mu\sin\alpha)$. Soluția este valabilă dacă $\cos\alpha > \mu\sin\alpha$ sau $\operatorname{ctg}\alpha < \mu$. Dacă $\mu > \operatorname{ctg}\alpha$, tunul rămîne pe loc.

1.136. Molecula care ciocnește peretele sub unghiul φ va fi reflectată cu același unghi față de normală așa cum se vede în figura 1.136.R. Asupra peretelui se exercită o forță, care conform legii acțiunii și reacțiunii este egală cu reacțiunea exercitată de perete asupra moleculei. Vom scrie: $\vec{F}\tau = \Delta\vec{p}$. Scriem această ecuație proiectată pe cele două axe: $F_x\tau = p_{2x} - p_{1x} = m(v_{2x} - v_{1x}) = 2\,mv\cos\varphi$; $F_y\tau = p_{2y} - p_{1y} = m(v_{2y} - v_{1y}) = 0$. Se observă că reacțiunea peretelui va fi orientată în lungul axei x normal la perete. Valoarea ei va fi

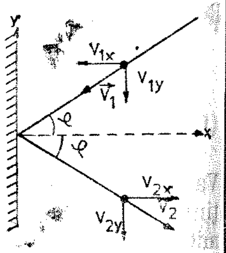

Fig. 1.136.R.

$$F_x = 2mv\cos\varphi/\tau = 2{,}8\cdot 10^{-15}\,N\cdot s.$$

1.137. Conform legii conservării impulsului, $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}$, de unde

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{2(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) + 3(-2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k})}{2+3} = 2(\vec{j} + \vec{k}).$$

1.138. a) $v_1 = v_0 - \mu g t_1 = 5\text{m/s}$; $l_1 = v_0 t_1 - \mu g\dfrac{t_1^2}{2} = 100$ m,

b) $v_c = \dfrac{m_1 v_1}{(m_1 + m_2)} = 2\text{m/s}$; $l_{op} = \dfrac{v_c^2}{2\mu g} = 2\text{m}$; $t_{op} = \dfrac{v_0}{\mu g} = 2\text{s}$.

c) $E_p = \dfrac{m_1 v_1^2}{2} - \dfrac{(m_1 + m_2)\,v_c^2}{2} = 125\text{kJ}.$

$$L_{fr} = \mu m_1 g l_1 + \mu(m_1 + m_2)g\,l_{op} = 1045 \text{ kJ}.$$

Se mai poate scrie:

$$L_{fr} = \Delta E_{c1} - \Delta E_{c2} = \frac{m_1(v_0^2 - v_1^2)}{2} - \frac{(m_1 + m_2)\,v_c^2}{2}.$$

1.139. Viteza masei m înainte de ciocnire este $v = \sqrt{2gh}$, iar după ciocnire $v_1 = mv/(m + m_1)$. Legea conservării energiei se scrie

$$\frac{m + m_1}{2}v_1^2 + (m_1 + m)\,gh_1 = \frac{1}{2}k(h_1 + l_0)^2 - \frac{1}{2}kl_0^2,$$

unde $l_0 = m_1 g/k$ este alungirea resortului înaintea căderii corpului de masă m, de unde

$$h_1 = \frac{mg}{k} + \sqrt{\frac{mg}{k}\left(\frac{mg}{k} + \frac{2mh}{m + m_1}\right)} = 10{,}1 \text{ cm}.$$

Corpul de masă m se află la distanța $h + h_1 = 19{,}1$ cm.

1.140. În poziția verticală a barei (fig. 1.40 R) legea a doua a lui Newton pentru primul corp se scrie

$$\frac{m_1 v^2}{l} = m_1 g - N \qquad (1)$$

unde v este viteza corpului, $2l$ lungimea barei, iar N forța cu care bara acționează asupra corpului, egală în modul și de sens opus cu forța F cu care corpul acționează asupra barei.

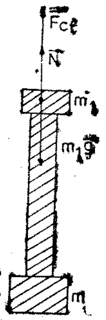

Fig. 1.140.R

Pentru calcularea vitezei v scriem legea conservării energiei pentru sistemul format din cele două corpuri legate prin bară:

$$\frac{m_1 + m_2}{2}v^2 = (m_2 - m_1)\,gl \qquad (2)$$

Din (1) şi (2)

$$F = N = \frac{m_1(3m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\, g = \frac{m_1 g}{3} = 2\text{N}.$$

1.141. Legea conservării impulsului se scrie: $(M + m)\, v_1 = mv$, unde v_1 este viteza sistemului bloc de lemn + glonte, iar v viteza glontelui. Din legea conservării energiei $(m+M)gh = \frac{1}{2}(M+m)\,v_1^2$, de unde $h = v_1^2/2g = m^2v^2/2g(M + m)^2$.
Deoarece $A \ll L$, rezultă $\sin\alpha \cong A/L$ şi

$$h = L(1 - \cos\alpha) \cong L\left(1 - \sqrt{1 - \frac{A^2}{L^2}}\right).\ \text{Deci:}$$

$$v = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gL\left(1 - \sqrt{1 - \frac{A^2}{L^2}}\right)}.$$

1.142. a) $(t_u)_1 = v_{01}/g = 4s$; $(h_{\max})_1 = v_{01}^2/2g = 80$ m.

$$t_2 = (t_u)_1 - \Delta t = 2s;\ v_{02}t_2 - \frac{gt_2^2}{2} = \frac{v_{01}^2}{2g},\ \text{de unde}\ v_{02} = \frac{\frac{v_{01}^2}{2g} + \frac{gt_2^2}{2}}{t_2} = 50\ \text{m/s}.$$

b) Viteza comună după ciocnire rezultă din $m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_c$, unde $v_2 = v_{02} - gt_2$, încît

$$v_c = \frac{m_2(v_{02} - gt_2)}{m_1 + m_2} = 20\ \text{m/s}.$$

Timpii de urcare pînă la înălţimea maximă şi de coborîre sînt:

$$t_u = \frac{v_c}{g} = 2s;\quad t_c = \sqrt{\frac{2}{g}\left(h_i + \frac{v_c^2}{2g}\right)} = 4{,}47\ \text{s}.$$

Timpul total de mişcare $t = (t_u)_1 + t_u + t_c = 10{,}47$ s.

c) $v_f = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g\left(h_i + \frac{v_c^2}{2g}\right)} = 44{,}72$ m/s.

d) $\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\,v_c^2}{2} + Q$; unde $v_2 = v_{02} - gt_2 = 30$ m/s.

Se obţine $Q = 300$ J.

1.143. a) După ciocnirea plastică, corpurile se mişcă împreună cu viteza comună $\vec{v}_c$ (fig. 1.143.R). Alegem un sistem de axe de coordonate cu originea în punctul de ciocnire şi una din axe orientată după direcţia comună de mişcare. Legea conservării impulsului:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{v}_c. \qquad (1)$$

Proiectînd pe cele două axe de coordonate rezultă:

$$m_1v_1\cos\alpha_1 + m_2v_2\cos\alpha_2 = (m_1+m_2)v, \qquad (2)$$
$$m_1v_1\sin\alpha_1 - m_2v_2\sin\alpha_2 = 0.$$

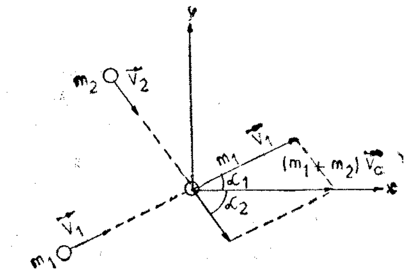

Fig. 1.143.R

Prin ridicare la pătrat a relaţiilor (2) şi prin adunare rezultă:

$$v_c = \frac{\sqrt{m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha}}{m_1 + m_2}.$$

Din a doua relaţie din sistemul (2) şi ţinînd cont că

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2,\ \text{rezultă}\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sin\alpha}{\frac{m_2v_2}{m_1v_1} + \cos\alpha}.$$

b) Viteza comună v_c se obţine mai uşor prin ridicarea relaţiei (1) la pătrat, avînd

$$m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha = (m_1 + m_2)^2\,v_c^2,$$

pe care o înlocuim în legea conservării energiei

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2} + Q\ \text{ şi rezultă}$$

$$Q = \frac{m_1v_2(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha)}{2(m_1 + m_2)}.$$

Dacă corpurile se mişcă în acelaşi sens ($\alpha = 0$), rezultă

$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{m_1 + m_2}$. Dacă corpurile se mişcă în sensuri contrare, apropiindu-se ($\alpha = \pi$), se obţine

$Q = \frac{m_1m_2(v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$. Dacă $\alpha = \frac{\pi}{2}$, obţinem:

$$Q = \frac{m_1m_2(v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}.$$

1.144. Scriem legile de conservare ale energiei și impulsului pentru sistemul format din planul înclinat și corp în momentul în care corpul părăsește planul înclinat:

$$mg(H - h) = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}, \qquad (1)$$

$$0 = m\vec{v} - M\vec{V} \qquad (2)$$

de unde rezultă viteza relativă u a corpului față de planul înclinat:

$$u = v + V = v(1 + n) = \sqrt{2g(H - h)(n + 1)}. \qquad (3)$$

Conservarea impulsului (2) este asigurată doar dacă $\vec{v}$ și $\vec{V}$ sînt orizontale.

Înălțimea h în cădere liberă este parcursă de corp în timpul

$$t = \sqrt{2h/g},$$

astfel că distanța dintre planul înclinat și corp în momentul căderii acestuia pe planul orizontal va fi:

$$l = ut = 2\sqrt{(1 + n)\,h(H - h)} = 1{,}6 \text{ m}.$$

1.145. Notăm cu v viteza inițială a neutronului. Conform legii de conservare a impulsului, $mv = 12\,mv_2 - mv_1$, de unde $v_2 = (v + v_1)/12$, unde v_1 este viteza neutronului după ciocnire, iar v_2 viteza nucleului de carbon. Conform legii conservării energiei,

$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(12m)\,v_2^2 + \frac{1}{2}mv_1^2$. Înlocuind pe v_2 rezultă $13v_1^2 + 2vv_1 - 11v^2 = 0$, adică

$$v_1 = \frac{-v + \sqrt{v^2 + 11.13\,v^2}}{13} = \frac{-v + 12v}{13} = \frac{11}{13}v.$$

Am ales doar rădăcina pozitivă deoarece semnul lui v_1 a fost luat în considerare în legea conservării impulsului. Raportul dintre energiile cinetice ale neutronului după și înainte de ciocnire este egal cu

$$\frac{E_c'}{E_c} = \frac{\frac{1}{2}m\cdot v_1^2}{\frac{1}{2}m\cdot v^2} = 0{,}71$$

1.146. a) Viteza primei bile înainte de ciocnire, rezultă din

$$\frac{m_1v_0^2}{2} + mg\,l_1(1 - \cos\alpha) = \frac{m_1v_1^2}{2}, \text{ încît}$$

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gl_1(1 - \cos\alpha)}. \qquad (1)$$

Viteza comună v_c se obține din legea conservării impulsului

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_c. \qquad (2)$$

Din legea conservării energiei rezultă α_{max}.

$$\frac{(m_1 + m_2)\,v_c^2}{2} = (m_1 + m_2)\,gl_1(1 - \cos\alpha_{max}), \text{ sau}$$

$$\cos\alpha_{max} = 1 - \frac{v_c^2}{2gl_1}. \qquad (3)$$

Căldura degajată în ciocnirea plastică rezultă din conservarea energiei

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\,v_c^2}{2} + Q,$$

unde v_1 și v_c sînt date de relațiile (1) și (2).

b) Din legile conservării energiei și impulsului se obțin vitezele bilelor v_1' și v_2' după ciocnirea elastică:

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2}; \quad m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2',$$

de unde rezultă

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)\,v_1}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{2m_1v_1}{m_1 + m_2}. \qquad (4)$$

Din legea conservării energiei, rezultă α_1 și α_2:

$m_1v_1'^2/2 = m_1gl_1(1 - \cos\alpha_1)$; $m_2v_2'^2/2 = m_2gl_2(1 - \cos\alpha_2)$, adică

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{v_1'^2}{2gl_1}; \quad \cos\alpha_2 = 1 - \frac{v_2'^2}{2gl_2}$$

cu v_1' și v_2' date de relațiile (4).

1.147. a) Conform legii conservării impulsului și a energiei avem

$$mv_1 = mv_1' + Mv_2', \quad \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{Mv_2'^2}{2},$$

de unde se obține

$$v_1' = \frac{m-M}{m+M}\cdot v_1;\quad v_2' = \frac{2mv_1}{m+M}. \qquad (1)$$

Viteza v_1 a corpului de masă m înainte de ciocnire, rezultă din conservarea energiei

$$mgl = mv_1^2/2;\quad v_1 = \sqrt{2gl}. \qquad (2)$$

Din legea conservării energiei între pozițiile B și C, avem

$$mv_1'^2/2 = mgh = mgl\,(1-\cos\alpha_{max}) \quad \text{sau}$$

$$\cos\alpha_{max} = 1 - \frac{v_1'^2}{2gl} = 1 - \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2.$$

b) $S_{op} = v_1'^2/2\mu g = 4l\,m^2/\mu(m+M)^2$.

1.148. a) Din legile de conservare ale impulsului și energiei

$$m_1v_1 = v_1'(m_2-m_1),\quad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{v_1'^2}{2}(m_1+m_2),$$

rezultă, $m_1/m_2 = 1/3$.

b) Conform legilor de conservare ale impulsului și energiei (fig. 1.148.R):

$$m_1v_1 = m_1v_1'\cos\frac{\theta}{2} + m_2v_2'\cos\frac{\theta}{2},$$

$$0 = m_1v_1'\sin\frac{\theta}{2} - m_2v_2'\sin\frac{\theta}{2}.$$

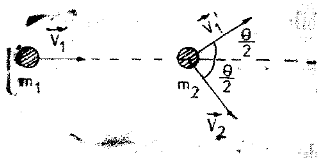

Fig. 1.148.R.

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2}+\frac{m_2v_2'^2}{2} \text{ și rezultă } \frac{m_1}{m_2} = 4\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2.$$

1.149. a) Conform legii conservării impulsului (fig. 1.149.a.R),

$$m_1v_1 = m_2v_2'\cos\alpha,\quad 0 = m_1v_1' - m_2v_2'\sin\alpha.$$

Eliminînd unghiul α rezultă

$$m_1^2v_1^2 + m_1^2v_1'^2 = m_2^2v_2'^2. \qquad (1)$$

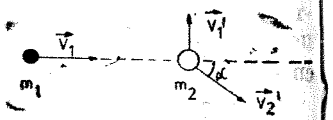

Fig. 1.149.a.R.

Conform legii conservării energiei,

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2}+\frac{m_2v_2'^2}{2}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2),

$$v_1'^2 = v_1^2\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} \quad \text{și}$$

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{\frac{m_1}{2}(v_1^2-v_1'^2)}{\frac{m_1}{2}v_1^2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}$$

b) Din legea conservării impulsului (fig. 1.149. b.R);

$$mv_1 = mv_1'\cos\alpha_1 + mv_2'\cos\alpha_2, \qquad (3)$$

$$0 = m_1v_1'\sin\alpha_1 - m_2v_2'\sin\alpha_2. \qquad (4)$$

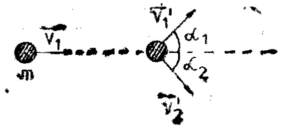

Fig. 1.149.b.R.

Ridicînd la pătrat și adunînd (3) și (4) rezultă

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{v_1^2-(v_1'^2+v_2'^2)}{2v_1'v_2'}. \qquad (5)$$

Din legea conservării energiei rezultă

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1'^2}{2}+\frac{mv_2'^2}{2}, \text{ adică } v_1^2 = v_1'^2+v_2'^2,$$

astfel $\cos(\alpha_1+\alpha_2) = 0$ și $\alpha_1+\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

1.150. Notînd cu α_1 și α_2 direcțiile vitezelor după ciocnire față de direcția inițială a vitezei primului corp (fig.1.150.R) teorema conservării impulsului proiectată pe două direcții perpendiculare se scrie:

$$m_1v_1 = m_1u_1\cos\alpha_1 + m_2u_2\cos\alpha_2; \qquad (1)$$

$$0 = m_1u_1\sin\alpha_1 - m_2u_2\sin\alpha_2.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd membru cu membru cele două ecuații (1) rezultă:

$$m_1^2v_1^2 = m_1^2u_1^2+m_2^2u_2^2+2m_1m_2u_1u_2\cos(\alpha_1+\alpha_2) \qquad (2)$$

de unde, ținînd cont că $m_1 = m_2$, rezultă:

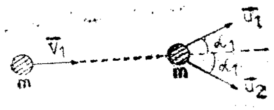

Fig. 1.150.R.

$$\cos(\alpha_1+\alpha_2) = \frac{v_1^2-(u_1^2+u_2^2)}{2u_1u_2} \qquad (3)$$

a) În cazul ciocnirii elastice se conservă energia cinetică :

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}, \qquad (4)$$

de unde $v_1^2 = u_1^2 + u_2^2$ și $\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = 0$, deci $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi/2$.

b) În cazul ciocnirii plastice $v_1^2 \neq u_1^2 + u_2^2$ și

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \neq 0, \quad \text{deci} \quad \alpha_1 + \alpha_2 \neq \pi/2.$$

1.151. a) Vom considera că bărcile sînt în ordine B_1, B_2 și B_3. Cei doi saci se află inițial în barca B_2. Ne vom referi mai întîi la aruncarea simultană a celor doi saci. Legea conservării impulsului pentru barca din față și sacul care este aruncat în ea se scrie :

$$Mv + m(u + v) = (M + m)v_1, \text{ deci } v_1 = v + \frac{m}{M + m}u.$$

Pentru barca din mijloc :

$$(M + 2m)\,v = Mv_2 + m(u + v) - m(u - v).$$

Rezultă $v_2 = v$. Pentru barca din spate (B_3) și sacul ce este aruncat în ea avem : $Mv - m(u - v) = (M + m)v_3$; rezultă

$$v_3 = v - \frac{m}{M + m}u.$$

b) Aruncarea succesivă. Vom considera că se aruncă mai întîi un sac în B_1 și apoi în B_3. Pentru B_1 și sac avem

$$Mv + m(u + v) = (M + m)\,v_1, \quad \text{deci } v_1 = v + \frac{m}{M + m}u.$$

Pentru B_2 împreună cu sacul rămas și sacul aruncat

$$(M + 2m)\,v = (M + m)\,v_2' - m(u + v); \quad \text{rezultă :}$$

$$v_2' = v - \frac{m}{M + m}u.$$

În continuare se aruncă sacul rămas din B_2 în B_3. Pentru B_2 și sac avem $(M + m)v_2' = Mv_2 - m(u_2 - v_2')$. Se obține viteza finală a bărcii $B_2 : v_2 = v + \dfrac{m^2u}{M(m + M)}$.

Ultima conservare de impuls o scriem pentru sistemul B_3 și sacul care vine în ea cu viteza $u - v_2'$. Avem

$$Mv - m(u - v_2') = (M + m)\,v_3, \text{ de unde : } v_3 = v - \frac{m(M + 2m)}{(M + m)^2}u.$$

1.152. Înainte de rupere corpul are componentele vitezelor $v_x = v_0 \cos\alpha$ și $v_y = gt_0 - v_0 \sin\alpha$ (durata $t_0 >$ timpul de urcare)

$$t_u = v_0 \sin\alpha / g.$$

Scriind legea conservării impulsului pe orizontală pentru procesul de rupere rezultă :

$$mv_0 \cos\alpha = \frac{m}{3}(v_0\cos\alpha + v_1) + \frac{2m}{3}v_{2x},$$

de unde $v_{2x} = v_0 \cos\alpha - \dfrac{v_1}{2}$.

Drumul orizontal parcurs de fragmentul mai mic este :

$$S_1 = v_0t_0 \cos\alpha + (v_0 \cos\alpha + v_1)\,t_1,$$

de unde timpul de cădere măsurat din momentul ruperii este :

$$t_1 = \frac{S_1 - v_0t_0\cos\alpha}{v_0\cos\alpha + v_1}.$$

Ruperea a avut loc la înălțimea :

$$h = (gt_0 - v_0\sin\alpha)\,t_1 + \frac{gt_1^2}{2}.$$

Pentru fragmentul mai mare,

$$S_2 = v_0t_0 \cos\alpha + v_{2x}t_2 \text{ și}$$

$$h = (gt_0 - v_0 \sin\alpha)\;t_2 + \frac{gt_2^2}{2}, \text{ deci } t_1 = t_2 \text{ și}$$

$$S_2 = v_0t_0 \cos\alpha + \left(v_0\cos\alpha - \frac{v_1}{2}\right)\frac{S_1 - v_0t_0\cos\alpha}{v_0\cos\alpha + v_1} =$$

$$= \frac{S_1(2v_0\cos\alpha - v_1) + 3v_0v_1t_0\cos\alpha}{2(v_0\cos\alpha + v_1)} \simeq -10{,}8\,\text{m}.$$

1.153. a) Notăm cu v viteza vagonului în momentul cînd firul pendulului face unghiul β cu verticala (fig. 1.153.R). Deoarece sistemul este inițial în repaus legea conservării impulsului se scrie :

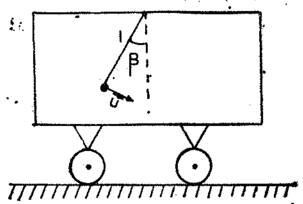

Fig. 1.153.R.

$$m(v + u\cos\beta) + Mv = 0.$$

Legea de conservare a energiei este :

$$\frac{m}{2}[(u\cos\beta + v)^2 + u^2\sin^2\beta] + \frac{M}{2}v^2 = mgl(\cos\beta - \cos\alpha).$$

Din cele două ecuații rezultă :

$$v^2 = \frac{2m^2gl}{(M+m)}\cdot\frac{(\cos\beta - \cos\alpha)\cos^2\beta}{(M + m\sin^2\beta)}.$$

b) $v^2 = 2\frac{m^2}{M^2}gl(1 - \cos\alpha)$ sau $v = 2\frac{m}{M}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gl}.$

1.154. a) În momentul trecerii corpului suspendat prin poziția verticală, el are o viteză orizontală v_0 :

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} \qquad (1)$$

Spațiul străbătut de corp pe verticală pînă la atingerea planului orizontal fiind h rezultă timpul de cădere

$$t_1 = \sqrt{2h/g}. \qquad (2)$$

În același timp corpul m parcurge pe orizontală distanța

$$d = v_0\cdot t_1 = 2\sqrt{lh(1 - \cos\alpha)}. \qquad (3)$$

Corpul m_1 parcurge în același timp același spațiu pe planul orizontal într-o mișcare uniform încetinită cu viteza inițială, v_1. Din relația

$$d = v_{01}\,t_1 - \frac{\mu g t_1^2}{2} \qquad (4)$$

rezultă

$$v_{01} = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} - \mu\sqrt{gh/2}. \qquad (5)$$

b) În momentul ciocnirii corpul m va avea o viteză v_2 cu componentele

$$v_{2x} = v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} \quad \text{și} \quad v_{2y} = gt_1 = \sqrt{2gh}.$$

Forța normală pe planul orizontal care acționează în intervalul de timp Δt, va fi

$$F_n = \frac{\Delta p_n}{\Delta t} + m_1g = \frac{mv_{2y}}{\Delta t} + m_1g. \qquad (6)$$

Forța de frecare ce acționează în acest interval de timp este $F_f = \mu F_n$, iar variația de impuls pe direcție orizontală datorită lui F_f va fi

$$\Delta p = F_f\cdot\Delta t = mv_{2y} + m_1g\,\Delta t. \qquad (7)$$

Proiecția legii conservării impulsului pe direcția orizontală va fi :

$$m_1v_1 + mv_{2x} - \Delta p = (m_1 + m)v, \qquad (8)$$

unde v_1 este viteza corpului m_1 în momentul ciocnirii, adică

$$v_1 = v_{01} - gt_1 = \sqrt{2lg(1 - \cos\alpha)} + \sqrt{2gh}\left(\frac{\mu}{2} - 1\right). \qquad (9)$$

Rezultă :

$$v = \frac{m_1v_1 + mv_{2x} - \Delta p}{m + m_1} = \sqrt{2lg(1 - \cos\alpha)} - \sqrt{2gh} + \frac{m_1}{m + m_1}\left(\frac{\mu}{2}\sqrt{2gh} - g\Delta t\right).$$

c) Spațiul parcurs de corpuri pînă la oprire este : $S = v^2/2\mu g$.

1.155. a) Din legea conservării impulsului $mv_1 = (m + M)v$ se scoate viteza comună

$$v = mv_1/(m + M). \qquad (1)$$

Legea conservării energiei, este

$$\frac{(m + M)v^2}{2} = \frac{k(\Delta l)^2}{2} + \mu(m + M)g\Delta l. \qquad (2)$$

Înlocuind relația (1) în (2) și făcînd calculele se obține :

$$v_1 = \sqrt{\frac{k(m + M)(\Delta l)^2}{m^2} + 2\mu g\left(\frac{m + M}{m}\right)^2\Delta l} = 12{,}65\ \text{m/s}.$$

b) Legea conservării energiei este :

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv'^2}{2} + \frac{k(\Delta l')^2}{2} + \mu Mg\,\Delta l',$$

de unde se obține $v_2 = 3{,}5$ m/s.

c) Deoarece la $t = 0$, $y = 0$ rezultă $\varphi = 0$, încît ecuația mișcării oscilatorii armonice este $y = A \sin\omega t$. Amplitudinea mișcării se obține din $\dfrac{(m+M)u^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$, rezultînd

$$A = u\sqrt{\frac{m+M}{k}} = \frac{mv_1}{m+M}\sqrt{\frac{m+M}{k}} = \frac{mv_1}{\sqrt{k(m+M)}} = 0{,}105 \text{ m}.$$

Deoarece : $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}} = 13{,}33$ rad/s, rezultă $y = 0{,}105 \sin 13{,}33\, t$.

1.156. Dacă viteza minimă căutată este v, atunci conform teoremei conservării energiei

$$mv^2/2 = \mu\, mg\, d + 2\,\mu\, mg\, x, \qquad (1)$$

unde x este comprimarea maximă a resortului. În acest moment, cînd ambele corpuri sînt în repaus, se poate scrie și că :

$$\frac{mv^2}{2} = \mu\, mg\, d + \frac{kx^2}{2} + \mu\, mg\, x, \qquad (2)$$

de unde :

$$x = 2\mu gm/k. \qquad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) rezultă : $v = \mu g\sqrt{2\left(\dfrac{d}{\mu g} + \dfrac{2m}{k}\right)}$.

1.157. Din conservarea impulsului, scrisă în poziția de echilibru

$$Mv = (M + m)\,u, \qquad (1)$$

rezultă viteza maximă de oscilație după ciocnire

$$u = Mv/(M + m). \qquad (2)$$

Scriind conservarea energiei înainte de ciocnire

$$kA_1^2/2 = Mv^2/2 \qquad (3)$$

și după ciocnire

$$kA_2^2/2 = (M + m)u^2/2, \qquad (4)$$

rezultă raportul amplitudinilor înainte și după ciocnire $A_1/A_2 = \sqrt{(M+m)/M} = 1{,}1$.

1.158. a) La un moment oarecare de timp vitezele corpurilor legate sînt : u_1 și u_2, iar deformarea resortului este x. Legile de conservare ale impulsului și energiei se scriu :

$$m(u_1 + u_2) = mv; \quad \frac{mu_1^2}{2} + \frac{mu_2^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

de unde

$$u_1 + u_2 = v \quad \text{și} \quad u_1u_2 = kx^2/2m.$$

Din aceste relații se vede că u_1 și u_2 vor avea același semn, deci cele două corpuri se vor deplasa în același sens.

b) Deformarea x este maximă cînd produsul u_1u_2 este maxim pentru suma $u_1 + u_2 = v$ constantă. Pentru a găsi valoarea maximă a lui x considerăm inegalitatea $(u_1 - u_2)^2 \geqslant 0$, sau, $u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2 \geqslant 0$. Dacă adăugăm $4u_1u_2$ în ambii membrii,

$$u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2 \geqslant 4u_1u_2, \text{ sau } (u_1 + u_2)^2 \geqslant 4u_1u_2.$$

Dar, $u_1 + u_2 = v$, deci, $v^2 \geqslant 4u_1u_2$, sau $u_1u_2 \leqslant v^2/4$. Deci, $(u_1u_2)_{max} = v^2/4$, ceea ce se realizează pentru $u_1 = u_2 = \dfrac{v}{2}$,

În acest moment distanța dintre corpurile legate este $l \pm x_{max} = l \pm v\sqrt{m/2k}$.

1.159. a) $\Delta l_1 = m_1g/k$; $(E_{op})_s = k(\Delta l_1)^2/2 = m_1^2g^2/2k$.

b) $m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$,

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2},$$

de unde rezultă

$$v_1' = \frac{2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad E_c' = \frac{m_1v_1'^2}{2} = \frac{2m_1m_2^2v_2^2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

c) Sistemul este prezentat în figura 1.159.a.R. În punctul A există energia potențială elastică $(k(\Delta l_1)^2/2)$ și energia cinetică $(m_1v_1'^2/2)$. În punctul B există energie potențială elastică $(E_{el})_B$ și energie potențială gravifică $(E_p)_B$. Ambele depind de noua alungire Δl_2 a resortului, determinată de componenta G_1 a greutății (forța centrifugă este nulă).

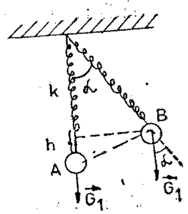

Fig. 1.159.a.R.

$$\Delta l_2 = \frac{G_1 \cos\alpha}{k} = \frac{m_1 g \cos\alpha}{k}, \quad (E_{el})_B = k\cdot\frac{(\Delta l_2)^2}{2} = \frac{m_1^2 g^2 \cos^2\alpha}{2k},$$

$$(E_p)_B = m_1 g h = m_1 g[(l_0 + \Delta l_1) - (l_0 + \Delta l_2)\cos\alpha].$$

Legea conservării energiei în A și B devine

$$(E_{el})_A + (E_c)_A = (E_{el})_B + (E_p)_B, \text{ sau}$$

$$\frac{k(\Delta l_1)^2}{2} + \frac{m_1 v_1'^2}{2} = \frac{m_1^2 g^2 \cos^2\alpha}{2k} + m_1 g[(l_0 + \Delta l_1) - (l_0 + \Delta l_2)\cos\alpha]$$

sau

$$\cos^2\alpha + 2\frac{kl_0}{m_1 g}\cos\alpha + \frac{kv_1'^2}{m_1 g^2} - \frac{2kl_0}{m_1 g} - 1 = 0.$$

Din această relație se obține α_{max} sub forma:

$$\alpha_{max} = \text{arc cos}\left[\frac{kl_0}{m_1 g} \pm \sqrt{\left(\frac{kl_0}{m_1 g}\right)^2 + \left(\frac{kv'^2}{m_1 g^2} - \frac{2kl_0}{m_1 g} - 1\right)^2}\right].$$

d) Din figura 1.159.b.R rezultă

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_{cf}}{G_1} = \frac{\omega_1^2 l \sin\alpha}{g}, \text{ sau}$$

$$\cos\alpha = \frac{g}{\omega_1^2 l}. \qquad (1)$$

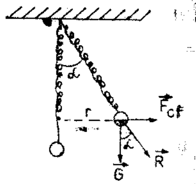

Fig. 1.159.b.R.

Forța rezultantă ce acționează asupra resortului este

$$R = G_1\cos\alpha + F_{cf}\sin\alpha = m_1 g \cos\alpha + m_1\omega_1^2 r \sin\alpha =$$

$$= m_1 g \cos\alpha + m_1\omega_1^2 l \sin^2\alpha = k[l - (l_0 + \Delta l_1)]. \qquad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) se obțin ω_1 și l sub forma

$$l = \frac{m_1 g}{k\cos\alpha} + (l_0 + \Delta l_1); \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{\frac{m_1 g}{k} + (\Delta l_1 + l_0)\cos\alpha}}.$$

iar alungirea $\Delta l = \dfrac{m_1 g}{k\cos\alpha}$.

1.160. Se alege axa Ox paralelă cu planul și axa Oy perpendiculară pe el (fig. 1.160 R). Componentele accelerației bilei pe cele două axe sînt:

$$a_x = g_x = g\sin\alpha \quad \text{și} \quad a_y = g_y = -g\cos\alpha.$$

După prima ciocnire cu planul viteza bilei va fi $v_0 = \sqrt{2gh}$ și direcția ei formează unghiul α cu axa Oy.

Distanța dintre punctele în care au loc primele două ciocniri este:

$$l_1 = v_0\sin\alpha\cdot t_1 + \frac{g\sin\alpha\cdot t_1^2}{2},$$

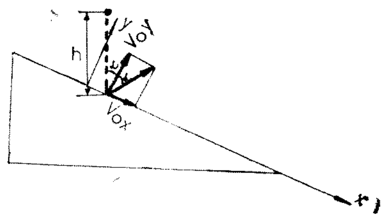

Fig. 1.160.R.

unde t_1 este dat de relația:

$$v_0 t_1\cos\alpha - \frac{g\cos\alpha\cdot t_1^2}{2} = 0.$$

Rezultă $t_1 = 2v_0/g$ și deci $l_1 = 8h\cdot\sin\alpha$.

Viteza bilei la cea de-a doua ciocnire poate fi găsită din ecuațiile:

$$v_{1x} = v_{0x} + a_x t_1 = v_0\sin\alpha + gt_1\sin\alpha = 3v_0\sin\alpha$$

$$v_{1y} = v_{0y} + a_y t_1 = v_0\cos\alpha - gt_1\cos\alpha = -v_0\cos\alpha.$$

După ciocnire vitezele sînt $v_{2x} = v_{1x}$ și $v_{2y} = -v_{1y}$.

Distanța dintre punctele în care are loc a doua și a treia ciocnire este egală cu

$$l_2 = 3v_0 t_2\sin\alpha + \frac{gt_2^2\sin\alpha}{2}.$$

Cum viteza în lungul axei Oy este aceeași ca după prima ciocnire rezultă că $t_2 = t_1$ și deci $l_2 = 16h\sin\alpha$. Analog se obține $l_3 = 24h\sin\alpha$. Deci:

$$l_1 : l_2 : l_3 : \ldots l_n = 1 : 2 : 3 : \ldots : 2n.$$

1.161. După ce părăsește planul stîng în punctul O bila va avea o traiectorie formată din parabole (fig. 1.161.R). Dacă se consideră că intervalele de timp după care se efectuează ciocniri consecutive sînt t_1, t_2, t_3, ..., t_n, atunci spațiile consecutive pe OB, care reprezintă proiecțiile parabolelor se află în raportul (vezi problema 1.160)

$$l_1 : l_2 : l_3 : \ldots : l_n = 1 : 3 : 5 \ldots : (2n - 1).$$

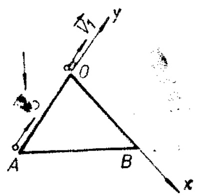

Fig. 1.161.R.

Dacă după a n-a ciocnire cu planul OB bila cade în B atunci

$$l_1 + l_2 + l_3 + \ldots + l_n = l_1[1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)] = l_1 n^2 = l.$$

Determinăm în continuare legătura dintre v_1 și l. În sistemul de axe ales proiecțiile accelerației bilei sînt

$$a_x = a_y = g\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{deci} \quad l_1 = a_x\frac{t_1^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}gt_1^2. \qquad (1)$$

Timpul t_1 se determină din mișcarea bilei pe y:

$$t_1 = \frac{2v_1}{a_y} = \sqrt{\frac{2l}{n^2 g}}. \qquad (2)$$

Înlocuind t_1 din (2) în (1) rezultă:

$$v_1^2 = \frac{gl\sqrt{2}}{4n^2}. \qquad (3)$$

Scriem legea conservării energiei pe planul AO

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgl\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{de unde se scoate}$$

$$v_0 = \sqrt{v_1^2 + gl\sqrt{2}}. \qquad (4)$$

Înlocuind v_1^2 din (3) în (4) se obține $v_0 = \sqrt{lg\sqrt{2}(4n^2+1)}/2n$ unde n este un număr natural.

Observăm că $\lim\limits_{n\to\infty} v_0 = \sqrt{gl\sqrt{2}}$ rezultat ce se obține și din legea conservării energiei întrucît pentru $n \to \infty$, $v_1 \to 0$.

1.5. Pendul gravitațional

1.162. a) Din legea conservării energiei,

$$v_{max} = \sqrt{2gh_{max}} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)},$$

unde $l = \dfrac{T^2 g}{4\pi^2}$, deci $v_{max} = Tg\sqrt{2(1-\cos\alpha)}/2\pi = 3{,}46\,\text{m/s}$;

b) $T_{min} = mg \cos\alpha = 4{,}9$ N și

$$T_{max} = mg + \frac{mv_{max}^2}{l} = mg(3 - 2\cos\alpha) = 2mg = 19{,}6\ \text{N}.$$

c) $$\frac{E_c}{E_p} = \frac{mv^2}{2mgh} = \frac{v^2}{2gh} = \frac{h_{max}-h}{h} = \frac{l(1-\cos\alpha) - l(1-\cos\beta)}{l(1-\cos\beta)} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{1-\cos\beta} = \frac{\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}} = 2{,}7.$$

1.163. a) Din legea conservării energiei:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl(1-\cos\varphi_0) = mgl(1-\cos\varphi),$$

unde $l = gt^2/4\pi^2 = 1$ m. Deci,

$$v_0 = \sqrt{2gl(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)} = 2{,}7\ \text{m/s}.$$

b) Într-o poziție care face un unghi φ_1 cu poziția de echilibru, tensiunea din fir este

$$T = mg\cos\varphi_1 + \frac{mv_1^2}{l} = mg(3\cos\varphi_1 - 2\cos\varphi),$$

deoarece $v_1^2 = 2gl(\cos\varphi_1 - \cos\varphi)$ din legea conservării energiei. Atunci: $\cos\varphi_1 = \dfrac{T + 2mg\cos\varphi}{3mg} = 1$ și $\varphi_1 = 0$.

c) $mv^2/2 = k(\Delta l)^2/2$, unde $v^2 = 2gl(1-\cos\varphi)$ și $k = ES/L$. Deci, $\Delta l = \sqrt{2mgl(1-\cos\varphi)L/ES} = 0{,}122$ m.

1.164. a) $T = 2\pi\sqrt{(h_0 - h)/g}$, de unde $h = 20$ m;
b) $L = mgh$, de unde $m = L/gh = 300$ kg;
c) $v = \sqrt{2aS} = \sqrt{2(\rho - \rho_0)gS/\rho} = 22{,}6$ m/s.

1.165. a) Conform figurii 1.165.a.R avem

$$T = R = m\sqrt{g^2 + a^2}, \quad \text{tg}\varphi = a/g.$$

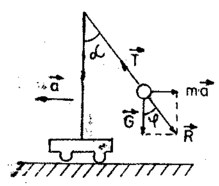

Fig. 1.165.a.R.

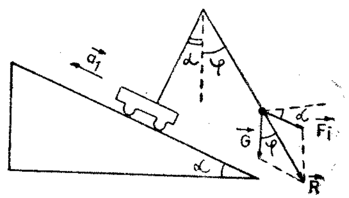

Fig. 1.165.b.R.

b) Din figura 1.165.b.R rezultă:

$$T = R = \sqrt{G^2 + m^2a_1^2 + 2ma_1\, mg\cos(90 - \alpha)} =$$

$$= m\sqrt{g^2 + a_1^2 + 2a_1 g \sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = ma_1\cos\alpha/(mg - ma_1\sin\alpha) = a_1\cos\alpha/(g - a_1\sin\alpha).$$

Din figura 1.165.c.R se obține

$$T = R =$$

$$= \sqrt{G^2 + m^2a_1^2 + 2ma_1\cdot mg\cos(90 + \alpha)} =$$

$$= m\sqrt{g^2 + a_1^2 - 2a_1 g\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{ma_1\cos\alpha}{G - ma_1\sin\alpha} = \frac{a_1\cos\alpha}{g - a_1\sin\alpha}.$$

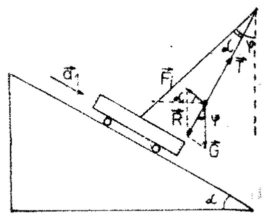

Fig. 1.165.c.R.

c) Este identic cu cazul 2 punctul b) unde se înlocuiește $a_1 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, rezultînd

$$T = m\sqrt{g^2 + g^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^2 - 2g^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= mg\sqrt{1 + \mu^2}\cdot\cos\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\cos\alpha}{g - g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

d) Perioada T a pendulului matematic este:

$T = 2\pi\sqrt{l/a_t}$; a_t = accelerația totală, rezultînd pentru fiecare caz în parte, valorile

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}},\quad T_2' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a_1^2 + 2a_1 g\sin\alpha}}},$$

$$T_2'' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a_1^2 - 2a_1 g\sin\alpha}}};\quad T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\sqrt{1 + \mu^2}\cos\alpha}}.$$

1.166. a) Să stabilim variația lui g cu latitudinea (fig. 1.166.R) Greutatea unui corp de masă m la latitudinea α este

$$G_\alpha = G_p - F'_{cf} \text{ sau } mg_\alpha = mg_p - m\omega^2\cos\alpha,$$

încît $g_\alpha = g_p - \omega^2 R\cos^2\alpha$; $\quad \omega = 2\pi/T$.

Pentru ecuator ($\alpha = 0°$), încît

$g_e = g_p - \dfrac{4\pi^2}{T^2}R = 9{,}787$ m/s², unde T este perioada de rotație a Pămîntului ($T = 24\ h$);

$$\frac{T_e}{T_p} = \sqrt{\frac{g_p}{g_e}} = \sqrt{\frac{g_p}{\left(g_p - \dfrac{4\pi^2}{T^2}R\right)}} = 1{,}00168, \text{ de}$$

unde $T_e = 2{,}003369$ s.

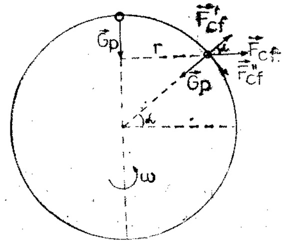

Fig. 1.166.R.

b) Din condiția $T_p = T_e$ se obține

$\dfrac{l_p}{g_p} = \dfrac{l_e}{g_e}$; $\dfrac{g_p}{g_e} = \dfrac{l_p}{l_e} > 1$, deci $l_p > l_e$, pendulul trebuie scurtat cu valoarea

$$\Delta l = l_p - l_e = l_p\left(1 - \frac{g_e}{g_p}\right) = \frac{g_p T_p^2}{4\pi^2}\left(1 - \frac{g_e}{g_p}\right) =$$

$$= \frac{T_p^2(g_p - g_e)}{4\pi^2} = 0{,}35 \text{ cm}.$$

c) $$\frac{T_\alpha}{T_\beta} = \sqrt{\frac{g_\beta}{g_\alpha}} = \sqrt{\frac{(g_p - \omega^2R\cos^2\beta)}{(g_p - \omega^2R\cos^2\alpha)}} = 0{,}99958.$$

1.167. Numărul de oscilații efectuat în 24 ore este $N = 24.3600/T_1$. Dacă perioada pendulului se schimbă, atunci pendulul aflat deasupra solului va rămîne în urmă cu $\Delta t = N(T_2 - T_1)$ în 24 de ore, unde

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_1}} \text{ și } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_2}}.$$

Rezultă: $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{g_2}{g_1}} = \dfrac{R}{(R + h)}$ și $T_2 = T_1\dfrac{(R + h)}{R}$,

unde R este raza Pămîntului, iar h înălțimea la care se află pendulul față de sol. Putem scrie: $T_2 - T_1 = \dfrac{h\,T_1}{R}$.

Deci, $\Delta t = \dfrac{Nh\,T_1}{R} = 2{,}7$ s.

1.168. a) Variația accelerației gravitaționale cu înălțimea este $g_h = g_e\left(\dfrac{R}{R + h}\right)^2$ încît

$$T_h = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_e}}\left(\frac{R + h}{R}\right) = T_e\left(\frac{R + h}{R}\right) = 2{,}156 \text{ s},$$

căci $T_e = 2$ s (pendulul bate secunda).

b) $T_e = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_e}}$; de unde $l = \dfrac{T_e^2 g_e}{4\pi^2} = 0,99$ m.

$T'_h = 2\pi\sqrt{\dfrac{l'}{g_e}}\left(\dfrac{R+h}{R}\right)$. Din condiția $T'_h = T_e$, avem $l' = l\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^2 = 0,85$ m. Deci, pendulul trebuie scurtat cu $\Delta l = l - l' = 0,14$ m.

c) Notăm cu T_e și T'_e perioadele pendulului la ecuator cînd Pămîntul se rotește cu viteza unghiulară ω și respectiv cu $\omega' = \dfrac{\omega}{2}$. Greutatea corpului la ecuator este egală cu diferența dintre greutatea acelui corp la pol și forța centrifugă, adică $G_e = G_p - F_{cf}$ sau $g_e = g_p - \omega^2 R$. Analog

$$g'_e = g_p - \omega'^2 R = g_p - \frac{\omega^2 R}{4} =$$

$$= g_e + \omega^2 R - \frac{\omega^2 R}{4} = g_e + \frac{3}{4}\omega^2 R.$$

Deci,

$$\frac{T'_e}{T_e} = \frac{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g'_e}}}{2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_e}}} = \sqrt{\frac{g_e}{g'_e}} = \sqrt{\frac{g_e}{g_e + \dfrac{3}{4}\omega^2 R}} = 0,9987,$$

căci $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, unde $T = 24\text{h} = 86\,400$ s (perioada de rotație a Pămîntului în jurul axei sale). În final, rezultă $T'_e = 1,997$ s.

1.169. a) $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g+a}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$;

$T_3 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g-a}}$; $T_4 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\cos\alpha}}$; $T_5 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g\sqrt{1+\mu^2}}}$;

b) Tensiunea maximă în fir pe porțiunea unde ascensorul se deplasează uniform accelerat apare în momentul cînd pendulul trece prin poziție verticală, deci :

$$T_{max} = G + F_i + F_{cf\,max} = m\left[g + a + \frac{2g^2}{g+a}(1 - \cos\alpha_0)\right].$$

c) $n_1 = \dfrac{t_1}{T_1} = \dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{h(g+a)}{l\cdot a}}$; $n_2 = \dfrac{t_2}{T_2} = \dfrac{3}{4\pi}\sqrt{\dfrac{gh}{al}}$

$n_3 = \dfrac{t_3}{T_3} = \dfrac{1}{4\pi}\sqrt{\dfrac{h(g-a)}{l\cdot a}}$; $n_4 = \dfrac{t_4}{T_4} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2h\,\text{ctg}\,\alpha}{l}}$;

$n_5 = \dfrac{t_5}{T_5} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2d\sqrt{1+\mu^2}}{\mu^2 l}}\sin\alpha.$

1.6. Cîmpul gravitațional

1.170. Intensitatea cîmpului gravitațional creat de o sarcină de masă m la distanța d este $\Gamma = k\dfrac{m}{d^2}$, unde $k = 6,673\cdot 10^{-11}$ $\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ este constanta atracției universale. Intensitatea cîmpului gravitațional în punctul C (fig. 1.170.R) este :

$$\Gamma_C = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2\cos\alpha} =$$

$$= k\sqrt{\left(\frac{m_1}{d_1^2}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{d_2^2}\right)^2 + \frac{2m_1m_2}{d_1^2\cdot d_2^2}\cos\alpha}.$$

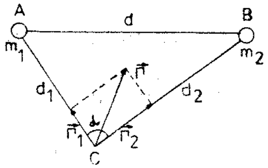

Fig. 1.170.R.

Folosind teorema cosinusului în triunghiul ABC (fig. 1.170.R) avem

$$\cos\alpha = \frac{d_1^2 + d_2^2 - d^2}{2d_1d_2} = 0,16.$$

Se obține numeric : $\Gamma_C = 0,42\cdot 10^{-7}$ N/kg.

1.171. Accelerația gravitațională medie de la suprafața Pămîntului pînă la înălțimea h este dată de media geometrică a accelerațiilor gravitaționale la suprafața Pămîntului (g_0) și la înălțimea respectivă (g_h) la care ajunge proiectilul.

$$g_m = \sqrt{g_0\,g_h}, \text{ unde } g_h = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2},$$

încît $g_m = \dfrac{g_0 R}{R+h}$. Înălțimea maximă h este

$$h = \frac{v_0^2}{2g_m} = \frac{v_0^2(R+h)}{2g_0 R} \text{ sau } h = \frac{v_0^2 R}{2g_0R - v_0^2} = 2,5\cdot 10^4 \text{ km}.$$

1.172. a) Energia potențială a satelitului la înălțimea h socotită față de suprafața Pămîntului, de unde are loc lansarea, este egală cu diferența energiilor potențiale ale satelitului la înălțimea h și suprafața Pămîntului, calculate față de centrul Pămîntului.

$$E_p = E_{R+h} - E_R = mg(R+h) - mg_0R.$$

Ținînd cont că $g = g_0 \dfrac{R^2}{(R+h)^2}$, relația anterioară devine:

$$E_p = mg_0\frac{Rh}{R+h}. \qquad (1)$$

Energia cinetică a satelitului la înălțimea h, este $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$;

Din condiția de satelit

$$\frac{mv^2}{R+h} = mg_h = mg_0\frac{R^2}{(R+h)^2}, \qquad (2)$$

se obține: $$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{mg_0}{2}\cdot\frac{R^2}{R+h}. \qquad (3)$$

Din condiția dată ($E_c = E_p$), se obține $h = \dfrac{R}{2} = 3\,200$ km.

b) Din relația (2), rezultă:

$$v = \sqrt{\frac{g_0R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{2}{3}g_0R} = 6{,}532\cdot10^3 \text{ m/s}.$$

c) $N = \dfrac{t}{T}$; unde $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi(R+h)}{v} = \dfrac{3\pi R}{v}$, încît

$$N = \frac{vt}{2\pi R} = 14.$$

1.173. $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$, unde $v = R\sqrt{\dfrac{g}{R+h}}$, încît

$$E_c = \frac{mgR^2}{2(R+h)^2}. \qquad (1)$$

Energia potențială la suprafața Pămîntului față de centrul său și la înălțimea h va fi:

$$E_{p1} = k\frac{mM}{R}, \quad E_{p_2} = \frac{kmM}{R+h}.$$

Energia potențială a satelitului față de suprafața Pămîntului este

$$E_p = E_{p_1} - E_{p_2} = kmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right).$$

Dar $mg = k\dfrac{mM}{R^2}$, încît $kmM = mgR^2$, iar

$$E_p = mgR^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right). \qquad (2)$$

Punînd condiția $E_p = 2E_c$ și folosind relațiile (1) și (2) rezultă că $h = R$.

1.174. a) Sistemul este prezentat în figura 1.174.R. Accelerația centripetă a Pămîntului este

$$a_n = \frac{v^2}{R_1} = \frac{\left(\dfrac{2\pi R_1}{T}\right)^2}{R_1} = \frac{4\pi^2R_1}{T^2}.$$

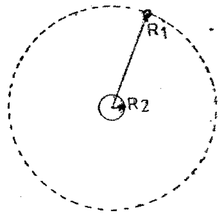

Fig. 1.174.R.

Notînd cu g_S valoarea accelerației în căderea liberă pe suprafața Soarelui și cu g' accelerația față de Soare a aceluiași corp aflat pe Pămînt avem:

$$mg_S = k\frac{mM_S}{R_2^2} \quad (1); \quad mg' = k\frac{mM_S}{R_1^2}.$$

Facem raportul lor: $\dfrac{g_S}{g'} = \dfrac{R_1^2}{R_2^2}$. Dar $g' = a_n$, încît

$$g_S = g'\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{4\pi^2R_1}{T^2}\cdot\frac{R_1^2}{R_2^2} = 27\ g_0,$$

unde g_0 este accelerația gravitațională pe Pămînt.

b) Cunoscînd g_S se obține din (1):

$$M_S = \frac{g_SR_2^2}{k} = 1{,}457\cdot10^{30}\text{ kg}; \quad \rho_S = \frac{M}{V} = \frac{g_SR_2^2}{k}\cdot\frac{3}{4\pi R_2^3} =$$

$$= \frac{81g_0}{4\pi kR_2} = 1\,620\text{ kg/m}^3; \quad M_P = \frac{gR^2}{k} = 6\cdot10^{24}\text{ kg};$$

$$\rho_P = \frac{3g}{4\pi kR} = 5\,500\text{ kg/m}^3.$$

1.175. a) Considerînd masa Pămîntului concentrată în centrul său, corpul aflat la distanța $r < R$ (fig. 1.175.R) va fi supus acțiunii unei forțe

$$F = k\frac{mm'}{r^2} = k\frac{m}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r^3 = 4\pi k\rho\, mr/3,$$ unde m'

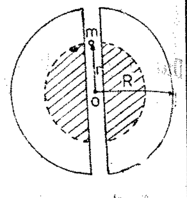

Fig. 1.175.R.

este masa porțiunii hașurate. Forța F fiind proporțională cu distanța este o forță elastică, de forma $F = k_e r$, unde $k_e = \frac{4}{3}\pi k\rho m$. Forța fiind de tip elastic produce o mișcare oscilatorie armonică, de forma $r = R\sin(\omega t + \varphi)$. Luînd la $t = 0$, $r = R$ se obține $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{4}{3}\pi k\rho} = \sqrt{\frac{g}{R}},$$

unde s-a folosit relația $mg = k\frac{mM}{R^2}$ și s-a înlocuit $k = \frac{gR^2}{M}$. În final,

$$r = R\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = 6{,}4\cdot 10^6\sin\left(1{,}25\cdot 10^{-3}\,t + \frac{\pi}{2}\right)\text{m}.$$

Perioada mișcării este : $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5\,026{,}5$ s $= 83{,}8$ min.

b) $v = \frac{dr}{dt} = \sqrt{Rg}\cos\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \frac{\pi}{2}\right)$; $v_{max} = \sqrt{gR} = 7{,}9$ km/s.

$$a = \frac{dv}{dt} = -g\sin\left(\sqrt{\frac{g}{R}}\,t + \frac{\pi}{2}\right);\quad a_{max} = -9{,}8\ \text{m/s}^2.$$

c) $E_t = \frac{k_e R^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2} = 3{,}12\cdot 10^7$ J.

1.176. a) Asupra corpului acționează forța de atracție $\vec{F}_A$ a Pămîntului dirijată spre centrul acestuia, dacă se consideră Pămîntul sferic, forța centrifugă $\vec{F}_c$ și tensiunea $\vec{T}$ (fig. 1.176.R). Condiția

$$\vec{F}_A + \vec{F}_c + \vec{T} = 0,\ (1)\ \text{sau}\ \vec{G} + \vec{T} = 0,\ \text{adică}\ \vec{G} = -\vec{T}.$$

Proiectînd relația (1) pe direcția x perpendiculară pe $\vec{T}$ rezultă:

$$F_c\sin(\lambda + \alpha) - F_A\sin\alpha = 0,$$

unde λ este latitudinea locului și de unde :

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{F_c\sin\lambda}{F_A - F_c\cos\lambda} = \frac{mr\,\omega^2\cos\lambda\sin\lambda}{F_A - mr\,\omega^2\cos^2\lambda}.$$

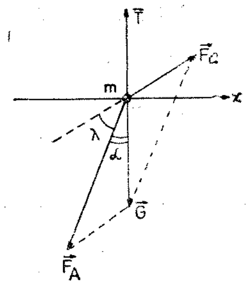

Fig. 1.176.R.

Se observă că $\alpha = 0$ pentru $\lambda = \frac{\pi}{2}$ (la poli)

b) $\alpha = 0$ pentru $\lambda = 0$ (la ecuator).

c) Pentru $\lambda = \frac{\pi}{4}$ și $F_A = m\left(9{,}80 - 0{,}025\cos^2\frac{\pi}{4}\right) = 9{,}8$ m, $\text{tg}\alpha = \frac{r\omega^2\cdot\frac{1}{2}}{9{,}8 - r\omega^2\cdot\frac{1}{2}} = 0{,}0017$,

adică $\alpha = 5{,}93'$.

Pentru latitudinea sudică, $\lambda = -\pi/4$ și $\alpha = -5{,}93'$.

1.177. a) Perioada de rotație a satelitului trebuie să fie egală cu cea a Pămîntului. Din condiția de satelit :

$kmM_p/R^2 = m\,4\pi^2 R/T^2$, rezultă că $R = \sqrt[3]{kM_P\,T^2/4\pi^2}$. Dar

$kM_P = g_0 R_P^2$, deci $R = \sqrt[3]{g_0 R_P^2\ T^2/4\pi^2} = 4{,}245\cdot 10^7$ m.

b) $T = 24$h ;

c) Deoarece $R > R_p$ planul orbitei poate fi un plan ecuatorial.

1.178. Din condiția de satelit,

$$m\omega^2 R = k\frac{Mm}{R^2},\quad M = \frac{\omega^2 R^3}{k}\ \text{unde}$$

$$\omega = \omega_P + \omega_S = \frac{2\pi}{T_P} + \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi(\tau + T_P)}{\tau T_p}\ \text{și}\ T_p = 24\ \text{h}.$$

Deci, $M = \frac{4\pi^2 R^3(\tau + T_P)^2}{k\tau^2 T_P^2} = 6\cdot 10^{24}$ kg.

1.179. Dacă notăm cu m masa stației, cu M masa Pămîntului, cu M_S masa Soarelui, cu R raza Pămîntului și cu R_1 raza orbitei pămîntești, cu v viteza stației față de Soare în momentul lansării și cu v' viteza stației cînd părăsește sistemul solar, legea conservării energiei se scrie :

$$\frac{mv^2}{2} = k\frac{mM}{R} + k\frac{mM_S}{R_1} + \frac{mv'^2}{2}.$$

Condiția de satelit a Pămîntului față de Soare se scrie: $v_0^2 = k\frac{M_s}{R_1}$, mai avem $kM = g_0 R^2$. Atunci, $v^2 = 2g_0 R + 2v_0^2 + v'^2$, de unde $v = 47$ km/s. Deci, $v_{min} = v - v_0 = 16{,}2$ km/s.

1.180. a) Mişcarea pe rampă este uniform accelerată avînd $a = \frac{v_0^2}{2l} = 16$ m/s².

Forța de tracțiune a motorului rachetei este

$$F_{tr} = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma = 2\,186 \text{ N}.$$

Puterea medie dezvoltată de motor pe rampă este

$$P_m = F_{tr}\cdot v_m = F_{tr}\cdot\frac{v_0}{2} = 43{,}72 \text{ kW}.$$

b) Din variația energiei cinetice avem:

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2) = L; \quad v = \sqrt{\frac{2L}{m} + v_0^2} = 7\,040 \text{ m/s}.$$

c) $G_h = mg_h = mg_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$; $\quad g_h = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}$ (1).

Condiția de satelit este obținută din egalarea greutății G_h cu forța centrifugă;

$$mg_h = \frac{mv^2}{R+h}; \quad g_h = \frac{v^2}{R+h}. \quad (2)$$

Egalînd relațiile (1) și (2) rezultă:

$$h = g_0\left(\frac{R}{v}\right)^2 - R = 1\,820 \text{ km}.$$

1.181. Conform indicațiilor dinamometrului

$$m_1 g_p = m_2 g_L = F,$$

accelerația mișcării corpurilor atîrnate de firul trecut peste scripete, pe Lună, este

$$a = \frac{(m_2 - m_1)\,g_L}{m_1 + m_2}.$$

Eliminînd pe m_1 și pe g_L rezultă;

$$am_2^2\, g_p - m_2 - m_2 F(g_p - a) + F^2 = 0,$$

de unde

$$m_2 = 6 \text{ kg}.$$

1.7. Cinematica și dinamica rigidului

1.182. a) Momentul cinetic corespunzător bilei aflată în mișcare de rotație se conservă, deci $L_1 = L_2$ sau: $l_1\, m\,\omega_1\, l_1 = l_2\, m\,\omega_2\, l_2$ deci $n_2 = \frac{n_1 l_1^2}{l_2^2} = 4$ rot/s.

b) $p_1 = m\omega_1 l_1 = m\cdot\frac{2\pi n_1}{60}\cdot l_1 = 6{,}28\cdot 10^{-3}$ kg · m/s;

$$p_2 = m\omega_2 l_2 = m\cdot\frac{2\pi n_2 l_2}{60} = 2p_1.$$

c) Lucrul mecanic $\mathscr{L}$ efectuat pentru scurtarea firului este egal cu variația energiei cinetice:

$$\mathscr{L} = W_1 - W_2 = \frac{1}{2}m^2\omega_1^2 l_1^2 - \frac{1}{2}m^2\omega_2^2 l_2^2 =$$

$$= 2\pi^2\cdot m n_1 l_2^2(l_1^2/l_2^2 - 1) = 0{,}212 \text{ J}.$$

d) $F = \frac{mv^2}{r} = m\,\omega^2 r.$

1.183. Punem condiția ca momentul rezultant al greutăților G_1 și G_2 față de centrul de greutate să fie nul. Rezultă: $G_1 r_1 - G_2 r_2 = 0$; $r_1 + r_2 = l$. Din sistem se obține:

$$r_1 = \frac{m_2\, l}{m_1 + m_2} \text{ și } r_2 = \frac{m_1\, l}{m_1 + m_2}; \quad \vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

$$|\vec{P}| = |\vec{P}_1| - |\vec{P}_2| = m_1 v_1 - m_2 v_2 = \omega(m_1 r_1 - m_2 r_2) = 0;$$

$$E_c = \frac{I\,\omega^2}{2} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\,\omega^2/2 = \frac{m_1\, m_2\, l^2\,\omega^2}{2(m_1 + m_2)} = 75\cdot 10^{-3} \text{ J}.$$

$$L = I\omega = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)\omega = \frac{m_1\, m_2\, l^2\omega}{m_1 + m_2} = 5\cdot 10^{-2} \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}^2.$$

1.184. Avînd de-a face cu un sistem izolat, în rotație, momentul cinetic total se conservă. Deci,

$I_1\omega_1 = I_2\,\omega_2$, deci $\omega_2 = \omega_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$ sau $\nu_2 = \nu_1\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$, unde: $I_1 = I_0 + 2m(l_1/2)^2$; $I_2 = I_0 + 2m\,(l_2/2)^2$.

Se obține: $\nu_2 = \frac{I_0 + 2m(l_1/2)^2}{I_0 + 2m(l_2/2)^2}\,\nu_1 = 1{,}18 \text{ s}^{-1}$.

1.185. a) Forțele de greutate ale platformei și omului dau moment nul deoarece sînt paralele cu axa. Momentul cinetic al sistemului în raport cu axa de rotație se conservă, încît $(mr^2 + I)\omega = (mR^2 + I)\omega_0$ de unde

$$\omega = \frac{(mR^2 + I)\omega_0}{mr^2 + I} \quad (1).$$

b) $$\Delta E_c = \frac{1}{2}(mr^2 + I)\omega^2 - \frac{1}{2}(mR^2 + I)\omega_0^2 \quad (2).$$

Înlocuind relația (1) în (2) se obține în final

$$\Delta E_c = \frac{m\omega_0^2}{2}(R^2 - r^2)\frac{mR^2 + I}{mr^2 + I} \quad (3).$$

c) Pentru $r > R$, din relațiile (1) și (3) se constată că $\omega < \omega_0$, $\Delta E_c < 0$.

1.186. Sfera părăsește suprafața de rază R în momentul în care rezultanta dintre forța centrifugă și greutatea sferei de rază r este tangentă la sfera de rază $(R + r)$, adică

$$\frac{mv^2}{R + r} = mg\cos\theta \quad (1),$$

de unde viteza v a centrului de masă al sferei de rază r este

$$v = \sqrt{g(R + r)\cos\theta} \quad (2).$$

Legea conservării energiei pentru sfera de rază r se scrie

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (3),$$

unde I este momentul de inerție al sferei de rază r în raport cu centrul său de greutate. Ținînd cont că

$$v = \omega r,\ I = 2mr^2/5 \text{ și } h = (R + r)(1 - \cos\theta)$$

rezultă din (2) și (3) : $\omega = \sqrt{\dfrac{10g(R + r)}{17r^2}}$.

1.187. Din conservarea momentului cinetic

$$I_1\omega_0 = I_1\omega_1 + I_2\omega_2$$

și din faptul că viteza liniară a curelei de transmisie este aceeași, $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ rezultă

$$\omega_1 = \omega_0\frac{I_1 r_2}{I_1 r_2 + I_2 r_1}.$$

Înlocuind $I_1 = \dfrac{m_1 r_1^2}{2}$; $I_2 = \dfrac{m_2 r_2^2}{2}$ se obține

$$\omega_1 = \omega_0\frac{m_1 r_1}{m_1 r_1 + m_2 r_2}; \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\omega_0 m_1 r_1}{m_1 r_1 + m_2 r_2}.$$

1.188. a) În mișcarea circulară uniformă vectorul impuls este constant în modul, încît

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = mv = 2\text{N}\cdot\text{s}$$

dar vectorul impuls ($\vec{P}$) fiind ca și viteza totdeauna tangent la traiectorie, variază ca direcție (fig. 1.188.R) încît :

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1.$$

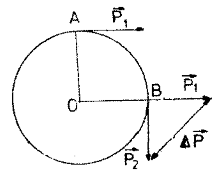

Fig. 1.188.R.

Deci,

$$|\Delta\vec{P}| = \sqrt{|\vec{P}_1|^2 + |\vec{P}_2|^2 - 2|\vec{P}_1|\cdot|\vec{P}_2|\cos 90^\circ} = mv\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\ \text{N}\cdot\text{s}.$$

b) Se folosește teorema variației momentului cinetic pentru punctul material $d\vec{L} = \vec{M}_{\vec{F},0}\,dt$. Forța ce determină mișcarea circulară uniformă a corpului este forța centripetă; $\vec{F} = -m\omega^2\vec{R}$, încît

$$\vec{M}_{F,0} = \vec{R}\times\vec{F} = \vec{R}\times(-m\omega^2\vec{R}) = m\omega^2\vec{R}\times\vec{R} = 0.$$

Rezultă că $d\vec{L} = 0$ sau $\Delta\vec{L} = 0$.

c) $$\Delta E_c = E_{c_2} - E_{c_1} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 0.$$

1.189. Deoarece suma momentelor aplicate din exterior este nulă, sistemul om-disc este conservativ, deci I = const. Notînd cu ω_1 și ω_2 vitezele de rotație ale discului și respectiv omului față de un centru fix de referință avem :

$$I_1\omega_1 - I_2\omega_2 = 0 \quad (1),$$

unde I_1 și I_2 sînt momentele de inerție ale discului și omului $\left(I_1 = \dfrac{1}{2}m_2R^2,\ I_2 = m_1r^2\right)$. Deoarece omul se deplasează față de disc cu viteza unghiulară $\omega_r = \dfrac{V}{r}$, atunci

$$\omega_2 = \frac{V}{r} - \omega_1 \quad (2).$$

Înlocuind relația (2) în (1) și ținînd seama de expresiile momentelor de inerție rezultă:

$$\omega = \frac{m_1 r V}{\frac{1}{2} m_2 R^2 + m_1 r^2}.$$

1.190. a) Din legea conservării momentului cinetic în timpul mișcării,

$$(I_0 + mR^2)\omega_0 = (I_0 + mr^2)\omega,$$

de unde

$$\omega = \frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}\omega_0 .$$

b) Variația energiei cinetice a sistemului va fi egală cu:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(I_0 + mr^2)\omega^2 - \frac{1}{2}(I_0 + mR^2)\omega_0^2 =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}(I_0 + mR^2)\left[\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right].$$

Dar, pentru a menține masa m în mișcare de rotație cu viteza ω, la distanța x de axa de rotație, în fir trebuie să apară tensiunea (forța centripetă)

$$F = m\omega^2 x = \left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mx^2}\right)^2 m\omega_0^2 x.$$

Lucrul mecanic efectuat de această forță cînd x variază de la R la r este:

$$L = \int_R^r F\,dx = (I_0 + mR^2)^2\omega_0^2 \int_R^r \frac{mx\,dx}{(I_0 + mx^2)^2} =$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2}(I_0 + mR^2)^2\left(-\frac{1}{I_0 + mx^2}\right)\Bigg|_R^r =$$

$$= -\frac{\omega_0^2}{2}(I_0 + mR^2)\left(\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2} - 1\right).$$

c) În sistemul de referință ce se rotește împreună cu masa, viteza căruciorului crește datorită acțiunii forței centrifuge, astfel

că în acest sistem energia cinetică a căruciorului la distanța R este egală cu lucrul mecanic calculat la punctul b):

$$\frac{mv_r^2}{2} = L \text{ de unde } v_r = \omega_0\sqrt{\frac{I_0 + mR^2}{I_0 + mr^2}(R^2 - r^2)}.$$

1.191. Legea conservării momentului cinetic se scrie: $L = (I_0 + 2mR_0^2)\omega_0 = (I_0 + 2mR_1^2)\omega_1$,

de unde $\omega_1 = \dfrac{I_0 + 2mR_0^2}{I_0 + 2mR_1^2}\omega_0$.

Variația energiei este:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(I_0 + 2mR_1^2)\omega_1^2 - \frac{1}{2}(I_0 + 2mR_0^2)\omega_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I_0 + 2mR_0^2)\omega_0^2\left[\frac{I_0 + 2mR_0^2}{I_0 + 2mR_1^2} - 1\right] < 0.$$

1.192. a) Legea conservării energiei după ce corpul de masă m a căzut pe distanța h (fig. 1.192.R) este:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_1\omega^2}{2} + \frac{I_2\omega^2}{2}$$

unde $I_1 = M_1R_1^2/2$; $I_2 = M_2R_2^2/2$; $v = at$;

$h = at^2/2$; $\omega = at/R_2$.

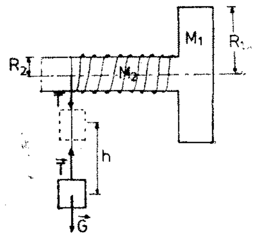

Fig. 1.192.R.

Făcînd înlocuirile și simplificările corespunzătoare, se obține:

$$a = \frac{mg}{m + \frac{M_2}{2} + \frac{M_1}{2}\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}.$$

b) Tensiunea în fir este: $T = m(g - a)$.

1.193. a) La urcare pe plan, energia cinetică totală (de rotație și de translație) se transformă în energie potențială, în punctul unde se oprește, și lucrul mecanic al forței de frecare

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{I\omega_0^2}{2} = mg\,l\sin\alpha + \mu mg\,l\cos\alpha \quad (1).$$

Înlocuind $I = 2\,mR^2/5$; $\omega_0 = v_0/R$; $l = v_0^2/2a_u$, se obține:

$$a_u = 5g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)/7 = 4{,}64 \text{ m/s} \quad (2).$$

Dacă $\mu = 0$, avem $a_u = \frac{5}{7} g \sin\alpha$. La coborîre pe plan, energia potențială se transformă în energie cinetică de rotație și translație la care se mai adaugă și lucrul mecanic al forței de frecare.

$$mgl \sin\alpha = \frac{mv_B^2}{2} + \frac{I\omega_B^2}{2} + \mu\, mgl \cos\alpha \quad (3).$$

Punctul B se află la baza planului. Înlocuind $l = v_B^2/2a_c$; $I = 2mR^2/5$; $\omega_B = v_B/R$ în legea conservării energiei (3) se obține

$$a_c = 5g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)/7 = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2} \quad (4).$$

Dacă $\mu = 0$; $a_c = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

b) $t_u = v_0/a_u = 2{,}15$ s; $S_{op} = v_0^2/2a_u = 10{,}77$ m.

c) $t_c = \sqrt{2S_{op}/a_c} = v_0/\sqrt{a_u a_c} = 2{,}94$ s; $v_B = \sqrt{2a_c S_{op}} = 7{,}39$ m/s.

1.194. Din conservarea energiei $Q = E_1 - E_2$ unde E_1 și E_2 conțin energiile cinetice de translație și de rotație.

$$E_1 = E_{1\mathrm{tr}} + E_{1\mathrm{rot}} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2} =$$

$$= \left(mv_1^2 + \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{v_1^2}{R^2}\right)/2 = 7\, mv_1^2/10$$

$$E_2 = 7\, mv_2^2/10;\quad Q = 7\, m(v_1^2 - v_2^2)/10 = 14\ \mathrm{J}.$$

1.195. a) Din legea conservării energiei aplicată sistemului (fig. 1.195.R), după ce corpul m a coborît cu distanța h

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = mgh,$$

unde $v = at$; $\omega = v/R = at/R$; $h = at^2/2$.

Făcînd înlocuirile, rezultă $I = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right) = 1{,}25\ \mathrm{kg\cdot m^2}$.

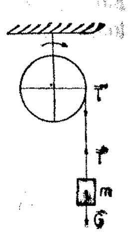

Fig. 1.195.R.

b) $T = m\left(g - \frac{2g}{3}\right) = 33{,}3$ N.

1.196. a) Se consideră o deplasare oarecare h a corpului m (fig. 1.196.R) și se scrie legea conservării energiei întregului sistem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (1),$$

unde $h = at^2/2$; $v = at$,

$$\omega = v/R = at/R \quad (2).$$

Înlocuind relațiile (2) în (1) rezultă: $a = mgR^2/(I + mR^2) = 0{,}23\ \mathrm{m/s^2}$.

b) $T = m(g - a) = 9{,}58$ N.

c) Înlocuind $v = \omega R$ în (1), rezultă:

$$h = \frac{\omega^2}{2mg}(mR^2 + I) = \frac{4\pi^2 n^2}{7200\ mg}(mR^2 + I) = 0{,}9\mathrm{m}$$

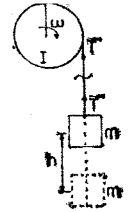

Fig. 1.196.R.

căci $\omega = 2\pi n/60$.

Observație. Primele două puncte se puteau obține și din sistemul:

$I\varepsilon = I\frac{a}{R} = TR$; $T = m(g - a)$ unde a este accelerația unghiulară. Pentru punctul c)

$$h = at^2/2 \text{ unde } t = \omega R/a.$$

1.197. Ecuația mișcării de rotație este $I\varepsilon = Tr$ (1), unde I este momentul de inerție, ε accelerația unghiulară și T tensiunea din fir, iar ecuația mișcării de translație $ma = mg - T$ (1). Ținînd cont că

$$I = \frac{Mr^2}{2},\ \text{din (1) și (2) rezultă } a = \frac{mg}{m + \frac{M}{2}}.$$

1.198. a) Aplicînd legea a doua a dinamicii corpurilor m_1, m_2 și m_3(fig. 1.198.R) se obține sistemul de ecuații:

$$T_1 - m_1 g \sin\alpha - \mu\, m_1 g \cos\alpha = m_1 a \quad (1);$$

$$(T_2 - T_1)R = I\varepsilon \quad (2);$$

$$m_3 g - T_2 = m_3 a \quad (3),$$

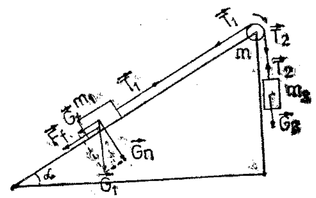

Fig. 1.198.R.

unde punem $I = \frac{1}{2} m_2 R^2$; $\varepsilon = \frac{a}{R}$.

Prin rezolvarea sistemului, rezultă

$$a = \frac{(m_3 - m_1 \sin\alpha - \mu\, m_1 \cos\alpha)g}{m_1 + m_3 + \frac{m_2}{2}} = 0{,}16\ \mathrm{m/s^2};$$

$T_1 = m_1(a + g\sin\alpha + \mu g \cos\alpha) = 78{,}6$ N; $T_2 = m_3(g - a) = 78{,}72$ N.

b) $F = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(90 - \alpha)} = 145{,}25$N.

11 - c. 348

1.199. Sistemul este prezentat în figura 1.199.R.

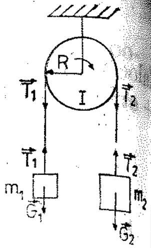

Fig. 1.199.R.

a) Presupunem $m_2 > m_1$. Din legea conservării energiei obținem

$$m_2gh = m_1gh + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (1).$$

Înlocuind în relația (1) $v_1 = v_2 = v = at$; $\omega = v/R = at/R$ și $h = at^2/2$ se obține $a = g\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \dfrac{I}{R^2}}$.

b) $\varepsilon = \dfrac{a}{R} = \dfrac{g}{R}\cdot\dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + I/R^2}$.

c) Din sistemul $T_1 - m_1g = m_1a$; $m_2g - T_2 = m_2a$ rezultă expresiile celor două tensiuni:

$$T_1 = m_1g\frac{2m_2R^2 + I}{(m_1 + m_2)R^2 + I} \text{ și } T_2 = m_2g\frac{2m_1R^2}{(m_1 + m_2)R^2 + I}.$$

1.200. a) Asupra mosorului acționează greutatea orientată pe direcția verticală și tensiunea T din fir orientată de-a lungul firului. Mosorul nu va pendula cînd componenta orizontală a rezultantei forțelor va fi nulă. Aceasta înseamnă că T trebuie să fie verticală, deci ca unghiul să fie nul.

b) Scriem ecuațiile de mișcare ale mosorului: pentru translație,

$$2Ma = 2Mg - T \quad (1)$$

și pentru rotație, $I = Tr$ (2), unde $I = MR^2$ și $\varepsilon = a/r$. Eliminînd pe T între (1) și (2) rezultă: $a = 2gr^2/(r^2 + R^2)$.

1.201. a) Se folosește legea conservării energiei

$$m_2gh_2 = m_1gh_1 + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

în care se înlocuiește $h_1 = a_1t^2/2 = \varepsilon R_1t^2/2$; $h_2 = \varepsilon R_2t^2/2$; $v_1 = a_1t = \varepsilon R_1t$; $v_2 = \varepsilon R_2t$; $\omega = \varepsilon t$ și se obține

$$\varepsilon = \frac{(m_2R_2 - m_1R_1)g}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}.$$

b) $T_2 = m_2(g - a_2) = m_2(g - \varepsilon R_2) =$

$$= m_2g\cdot\frac{m_1R_1(R_1 + R_2) + I}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I};$$

$$T_1 = m_1(g + a_1) = m_1(g + \varepsilon R_1) = m_1g\frac{m_2R_2(R_1 + R_2) + I}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I}$$

unde $a_1 = \varepsilon R_1$; $a_2 = \varepsilon R_2$.

Observație: Accelerația unghiulară ε și cele două tensiuni T_1 și T_2 se pot obține și prin rezolvarea sistemului:

$$T_1 - m_1g = m_1a_1 = m_1\varepsilon R_1; \quad T_2R_2 - T_1R_1 = I\varepsilon$$

$$m_2g - T_2 = m_2a_2 = m_2R_2.$$

1.202. a) Se rezolvă sistemul de ecuații:

$$T_1R_1 = I_1\varepsilon_1 = I_1\frac{a}{R_1}; \quad (1)$$

$$(T_2 - T_1)R_2 = I_2\varepsilon_2 = I_2\frac{a}{R_2}; \quad (2)$$

$$mg - T_2 = ma. \quad (3)$$

unde $I_1 = \dfrac{M_1R_1^2}{2}$; $I_2 = \dfrac{M_2R_2^2}{2}$.

Înlocuind I_1 și I_2 rezultă o simplificare a ecuațiilor anterioare

$$T_1 = \frac{M_1a}{2} \ (1'); \quad T_2 - T_1 = \frac{M_2a}{2} \ (2'); \quad mg - T_2 = ma \ (3').$$

Se obține: $a = \dfrac{2mg}{2m + M_1 + M_2} = 1\text{m/s}^2$; $T_1 = 8\text{N}$; $T_2 = 9\text{N}$.

b) $\varepsilon_1 = \dfrac{a}{R_1} = 2\ \text{rad/s}^2$; $\varepsilon_2 = \dfrac{a}{R_2} = 2{,}5\ \text{rad/s}^2$.

c) $v = at = 4\text{m/s}$; $h = \dfrac{at^2}{2} = 8\ \text{m}$.

d) $\omega_1 = \varepsilon_1t = 8\ \text{rad/s}$ $\quad \omega_2 = \varepsilon_2t = 10\ \text{rad/s}$.

$$N_1 = \frac{\alpha_1}{2\pi} = \frac{\varepsilon_1t^2}{4\pi} = \frac{at^2}{4\pi R_1} = 2{,}55 \text{ rot.}; \quad N_2 = \frac{at^2}{4\pi R^2} = 3{,}18 \text{ rot.}$$

Observație. Valoarea accelerației se poate determina și din legea conservării energiei:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} \quad \text{unde}$$

$$I_1 = \frac{M_1R_1}{2}; \quad I_2 = \frac{M_2R_2^2}{2}; \quad \omega_1 = \frac{v}{R_1}; \quad \omega_2 = \frac{v}{R_2};$$

$$v = at; \quad h = \frac{at^2}{2}.$$

1.203. Se rezolvă sistemul de ecuaţii

$$mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha - T = ma, \quad TR = \varepsilon I = I\frac{a}{R}$$

şi se obţine :

$$a = g\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{1 + I/mR^2}; \quad T = mg\cdot\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{1 + mR^2/I}.$$

Corpul poate luneca numai dacă este satisfăcută condiţia

$$mg\sin\alpha > \mu\, mg\cos\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha > \mu.$$

1.204. a) Pentru corpurile de masă m_1 şi m_3 (fig. 1.204.R) avem,

$$T_1 - \mu m_1 g = m_1 a \quad (1); \qquad m_3 g - T_2 = m_3 a \quad (2);$$

iar din egalarea momentelor forţelor faţă de axul scripetelui $I\varepsilon = (T_2 - T_1)R$, (3) unde $\varepsilon = a/R$, cu ε şi R accelerația unghiulară şi raza scripetelui. Momentul de inerţie al scripetelui (considerat cilindru plin) este $I = m_2R^2/2$. Relaţia (3) devine :

$$\frac{1}{2}m_2 a = T_2 - T_1. \qquad (3')$$

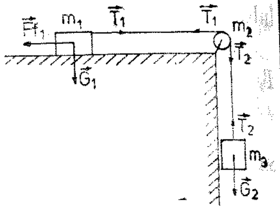

Fig. 1.204.R.

Din rezolvarea sistemului de ecuaţii (1), (2) şi (3′) rezultă :

$$a = \frac{(m_3 - \mu m_1)\,g}{m_1 + m_3 + \frac{1}{2}m_2} = 0{,}98\ \text{m/s}^2; \quad \varepsilon = a/R = 4{,}9\ \text{rad/s}^2;$$

b) $T_1 = m_1(a + \mu g) = 7{,}04$ N ; $T_2 = m_3(g - a) = 7{,}938$ N.

Observaţie. Acceleraţia liniară se poate determina şi din legea conservării energiei

$$m_3gh = \frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_3v^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

în care se înlocuieşte : $h = \frac{at^2}{2}$; $v = at$; $\omega = \frac{v}{R} = \frac{at}{R}$.

c) Luînd $a = 0$, avem $[m_3 - \mu(m_1 + m)]g = 0$ încît

$$m = \frac{(m_3 - \mu m_1)}{\mu} = 5\ \text{kg}.$$

1.205. Scriind legea conservării energiei : pentru cilindrul A :

$$m_1gh = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2}$$

şi pentru cilindrul B : $m_2gh = \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$, unde $\omega_1 = \frac{v_1}{R}$

şi $\omega_2 = \frac{v_2}{R}$, iar $I_1 = \frac{1}{2}m_1(R^2 + r^2)$ şi $I_2 = \frac{1}{2}m_2R^2$.

Înlocuind aceste expresii rezultă

$$v_1 = \left[\frac{4R^2}{3R^2 + r^2}gh\right]^{1/2} \quad \text{şi} \quad v_2 = \left[\frac{4gh}{3}\right]^{1/2}.$$

Deoarece $v_1 = gt_1\sin\alpha$ şi $v_2 = gt_2\sin\alpha$,

$$t_1 = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{4R^2h}{g(3R^2 + r^2)}\right]^{1/2} \quad \text{şi} \quad t_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\left[\frac{4h}{3g}\right]^{1/2}$$

şi deoarece $3R^2 < 3R^2 + r^2$ se observă că $t_1 < t_2$.

1.206. Ecuaţiile de variaţie a impulsului şi energiei cinetice sînt : $m(v_0 - v) = F_{fr}\cdot t$;

$$\frac{mv_0^2}{2} + \frac{m\omega_0^2r^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \frac{m\omega^2r^2}{2} = F_{fr}\,\frac{(v_0 + \omega_0 r) + (v + \omega r)}{2}\,t,$$

unde v este viteza cercului la momentul t. Rezolvînd sistemul se obţine :

$$v = v_0 - \frac{F_{fr}}{m}\,t \ \text{şi} \ \omega = \omega_0 - \frac{F_{fr}\cdot t}{mr}.$$

Dacă $v_0 < \omega_0 r$ cercul se va opri la momentul de timp $\tau = mv_0/F_{fr}$ cînd se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = \omega_0 - \frac{v_0}{r}$. Atunci cercul începe să se mişte cu alunecare în direcţie opusă. După un timp corpul nu va mai aluneca şi se va rostogoli fără alunecare cu o viteză de translaţie $v = (\omega_0 r - v_0)/2$. Dacă $v_0 > \omega_0 r$, atunci după timpul $\tau = mr\,\omega_0/F_{fr}$, cercul va înceta să se rotească şi se va deplasa spre dreapta cu viteza $v = v_0 - r\omega_0$. În continuare cercul se va roti în sens invers şi după un timp se va roti fără alunecare la dreapta.

1.207. Deoarece forţa de frecare F_{fr} cu planul orizontal este constantă ecuaţiile de variaţie a impulsului şi energiei cinetice ale

cercului se scriu $m(v_0 - v) = F_{fr}t$; $\frac{mv_0^2}{2} - mv^2 = F_{fr}\frac{v_0 + 0}{2}t$ unde $v = \omega r$ este viteza centrului cercului cînd se roteşte fără alunecare. Rezolvînd sistemul se obţine :

$$v = v_0/2, \text{ deci, } \omega = v_0/2r.$$

1.208. Deoarece forţa de frecare este constantă, mişcarea va fi uniform întîrziată. Puterea dezvoltată de forţa de frecare este $P = F_{fr}v$ unde $v = \omega r$ este viteza momentană a punctului la care se aplică forţa de frecare. Lucrul mecanic efectuat în timpul t este $W = F_{fr}\frac{\omega_0 r + \omega r}{2}t$. În acelaşi timp acest lucru mecanic este egal cu variaţia energiei cinetice

$$mr^2(\omega_0^2 - \omega^2)/2 = F_{fr}t(\omega_0 + \omega)/2.$$

Rezultă:
$$\omega = \omega_0 - \frac{F_{fr}t}{mr}.$$

1.209. a) Notăm viteza centrului de masă al cilindrului cu v_1, iar acceleraţia sa cu a_1. Deoarece cilindrul are o mişcare compusă (translaţie plus rotaţie) şi ştiind că în cazul rostogolirii viteza centrului de masă al cilindrului corespunde cu viteza liniară ($v_1 = \omega R$) rezultă că viteza v_2 a corpului m_2 va fi $v_2 = 2v_1$ şi deci $a_2 = 2a_1$. Vom scrie legea conservării energiei în cazul cînd avem o deplasare h a corpului de masă m_2 :

$$m_2gh = \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

unde $I = \frac{m_1R^2}{2}$, reprezintă momentul de inerţie al cilindrului, iar ω este viteza sa unghiulară. Ţinînd seama de relaţia dintre viteză şi acceleraţie se mai poate scrie :

$$\frac{m_2ga_2t^2}{2} = \frac{m_2a_2^2t^2}{2} + \frac{m_1a_2^2t^2}{4} + \frac{m_1a_2^2t^2}{8},$$

de unde rezultă :

$$a = \frac{8m_2g}{8m_2 + 3m_1} = \frac{g}{1 + \frac{3}{8}\frac{m_1}{m_2}},$$

b) Pentru corpul m_2 avem :

$$T = G - F_i = m_2g - m_2a = m_2\frac{3m_1g}{8m_2 + 3m_1}.$$

1.210. a) Determinăm acceleraţia centrului de masă al cilindrului utilizînd legea conservării energiei scrisă pentru cazul cînd cilindrul se rostogoleşte (deci forţa de frecare nu efectuează lucrul mecanic) :

$$m_2gh - m_1gh\sin\alpha = \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

unde $v_2 = 2v_1$. Ecuaţia se mai scrie :

$$gh(m_2 - m_1\sin\alpha) = 2m_2v_1^2 + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_1R^2 \cdot v_1^2}{R^2}.$$

Punînd $v_1 = a_1t$ şi $h = a_2t^2/2$ rezultă: $a_1 = g\frac{m_2 - m_1\sin\alpha}{2m_2 + \frac{3}{2}m_1}$.

b) Pentru a determina tensiunea în fir ţinem seama că $a_2 = 2a_1$, astfel încît pentru corpul cu masa m_2 se scrie

$$T = G_2 - F \text{ sau } T = m_2(g - a_2) = m_2g\frac{m_1\left(\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)}{2m_2 + \frac{3}{2}m_1}.$$

c) Pentru a nu avea alunecare este necesar ca $F_{fr} < \mu\, m_1g$. Pentru corpul m_1 se poate scrie :

$$T + F_{fr} = G_1\sin\alpha \quad \text{sau}$$

$$F_{fr} = G_1\sin\alpha - T = \frac{3}{2}\cdot\frac{m_1g(m_1\sin\alpha - m_2g)}{2m_2 + \frac{3}{2}m_1}.$$

Înlocuind F_f se obţine :

$$\mu > \frac{3}{2}\cdot\frac{m_1(m_1\sin\alpha - m_2g)}{m_1\cos\alpha\left(2m_2 + \frac{3}{2}m_1\right)}.$$

1.211. a) Dacă cilindrul se roteşte fără alunecare, punctul său de contact cu planul înclinat rămîne în repaus (viteza punctului de contact este zero), astfel că şi firul rămîne în repaus. Corpul m_2 va rămîne, de asemenea, în repaus, deci: $T = m_2g = 2N$.

b) În figura 1.211.R sînt prezentate forţele care acţionează asupra corpului de masă m_1. Pentru mişcarea centrului de masă al

cilindrului se scrie :

$$mg \sin \alpha - T - F_f = ma; \quad (1)$$

$$N - mg \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Pentru mişcarea de rotaţie în jurul axei ce trece prin centrul de masă avem :

$$(T + F_f) R = I\varepsilon, \quad (3)$$

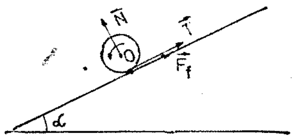

Fig. 1.211.R.

unde I este momentul forţelor de inerţie în raport cu această axă, iar ε este accelerația unghiulară. Legătura dintre a şi ε este dată de condiţia de rostogolire

$$a = \varepsilon R. \quad (4)$$

Rezolvînd ecuaţiile (1)—(4) obţinem : $a = \dfrac{g \sin \alpha}{1 + I/m_1R^2}$.

În cazul cilindrului $I = \dfrac{1}{2} m_1R^2$ şi rezultă $a = \dfrac{2g \sin \alpha}{3} = 3{,}3$ m/s².

c) Din ecuaţiile (1—4) se obţine : $F_{fr} = \dfrac{m_1 g \sin \alpha}{1 + m_1R^2/I} - m_2 g$.

Se observă că în cazul cînd $m_2 g > \dfrac{m_1 g \sin \alpha}{1 + m_1R^2/I}$, forţa de frecare îşi poate schimba sensul. Pentru ca să se producă rostogolirea cilindrului fără alunecare este necesar ca $|F_{fr}| < \mu N$ deci :

$$\mu > \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + m_1R^2/I} - \frac{m_2}{m_1 \cos \alpha} \right| \text{ şi numeric } \mu > \frac{1}{6\sqrt{3}}.$$

1.212. Considerăm cercul alcătuit din mici secţiuni fiecare avînd masa Δm. Vom considera două secţiuni simetrice faţă de centrul cercului (fig. 1.212.R). Particulele cercului participă simultan la o mişcare de translaţie cu viteza v şi la o mişcare de rotaţie cu viteza liniară $v_1 = \omega R$. Vitezele celor două secţiuni simetrice sînt :

$$v_2^2 = v_1^2 + v^2 + 2v_1 v \cos \alpha \quad \text{şi} \quad v_3^2 = v^2 + v_1^2 - 2vv_1 \cos \alpha.$$

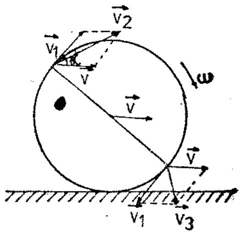

Fig. 1.212.R.

Energia cinetică a celor două secţiuni este :

$$E = \frac{\Delta(mv_2^2)}{2} + \frac{\Delta(mv_3^2)}{2} = \Delta(mv^2) + \Delta(m \cdot \omega^2 R^2).$$

Deoarece această expresie este adevărată pentru orice două secţiuni **ale cercului, rezultă** $E = \dfrac{Mv^2}{2} + \dfrac{MR^2\omega^2}{2}$.

În cazul rostogolirii fără alunecare $v = \omega R$ şi deci : $E = Mv^2$.

1.213. a) Legea a doua a dinamicii pentru fiecare dintre cele **două corpuri** are forma : $ma = G - T$. Această relaţie arată că **ambele corpuri se vor deplasa** în jos cu acceleraţia a. Este evident că **acceleraţia liniară a tamburului** este $a' = 2a$. În aceste condiţii **viteza liniară a tamburului este** : $v' = 2at$. Legea conservării energiei se scrie :

$$mgh + mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + \frac{Iv'^2}{2R^2} \quad \text{sau} \quad mgat^2 = ma^2t^2 + \frac{I\,4a^2t^2}{2R^2}$$

deci : $a = \dfrac{g}{1 + 2I/mR^2}$.

b) $T = m(g - a) = \dfrac{mg}{1 + mR^2/2I}$.

1.214. Vom considera că mosorul din figura 1.214.a se rostogoleşte spre dreapta. Capătul firului aflat pe mosor va avea o mişcare combinată. Astfel el se va deplasa spre dreapta odată cu axa mosorului şi în acelaşi timp se va deplasa spre stînga datorită înfăşurării firului pe mosor. Întrucît $r < R$ schimbarea lungimii firului în timpul unei rotaţii complete va fi mai mică decît mişcarea axei mosorului în aceeaşi perioadă. Rezultă astfel în urma însumării celor două mişcări că mişcarea capătului firului de pe mosor va avea aceeaşi direcţie cu cea a axei mosorului. În timpul unei rotaţii complete (de perioadă T) axa mosorului se va deplasa spre dreapta pe distanţa $2\pi R$ în timp ce lungimea firului se va micşora cu $2\pi r$. Considerînd viteza axei $v_0 = \dfrac{2\pi R}{T}$ atunci viteza cu care se va înfăşura firul va fi :

$$v' = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R}{T}\frac{r}{R} = \frac{r}{R} v_0.$$

Capătul firului se va deplasa cu o viteză v egală cu diferenţa $v_0 - v'$, deci $v = v_0 - \dfrac{r}{R} v_0$ sau $v_0 = \dfrac{R}{R - r} v$. Se vede că axa bobinei se va mişca mai repede decît capătul firului. În cazul din figura 1.214.b. se vede că axa bobinei se mişcă în acelaşi sens cu capătul firului, deci avem o însumare a vitezelor. Se obţine : $v_0 = Rv/(R + r)$.

1.215. a) Deoarece corpurile se rostogolesc (fără alunecare) între viteza axei de rotaţie a cercurilor v_0 şi viteza corpului de masă m

există relația $v_0' = v\,R/(R - r)$. Utilizăm legea conservării energiei; considerăm că sistemul a plecat din repaus și corpul de masă m a coborît cu distanța h, astfel că legea conservării energiei se scrie: $mgh = \frac{mv^2}{2} + Mv_0^2$. În legea conservării energiei lucrul mecanic al forței de frecare este nul deoarece punctul de contact permanent al corpului cu planul este în repaus (nu avem alunecare). În exprimarea energiei totale a corpului care se rostogolește am ținut seama de relația obținută în problema 1.212. Rezultă pentru viteza corpului de masă m expresia:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + 2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}}.$$

Ținînd seama de relația lui Galilei se obține:

$$a = \frac{mg}{m + 2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}.$$

b) Tensiunea se obține din relația:

$$T = mg - ma = \frac{2mMg\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}{m + 2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2}.$$

c) Legătura dintre accelerația centrului de rotație a_0 și cea a corpului de masă m este dată de o relație similară cu cea dintre viteze: $a_0 = aR/(R - r)$. Scriind legea a doua a dinamicii pentru corpul de masă M avem: $F_{fr} = T - Ma_0$ sau

$$F_{fr} = \frac{Mmg\left(\frac{R}{R-r}\right)\left(2 - \frac{R-r}{R}\right)}{m + 2M\left(\frac{R}{R-r}\right)^2} = \frac{Mmg\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{m\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 + 2M}.$$

d) În cazul cînd există alunecare forța de frecare este egală cu forța de frecare de alunecare (μMg), deci:

$$\frac{Mmg\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{m\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2 + 2M} = \mu Mg.$$

Pentru ca să existe alunecare este necesar ca

$$\mu = \frac{1 + \frac{r}{R}}{2\frac{M}{m} + \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2}.$$

Discuție: Dacă $F_{fr} > \mu Mg$ deci:

$$\mu < \frac{1 + \frac{r}{R}}{2\frac{M}{m} + \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2}$$ există, de asemenea, alunecare.

1.216. Ecuația de mișcare pentru centrul de masă al bilei este $Ma = -\mu Mg$, de unde $a = -\mu g$ și $v_{CM} = v_0 - \mu gt$. Pentru mișcarea de rotație ecuația de mișcare este $I\frac{d\omega}{dt} = \mu MgR$, unde momentul de inerție $I = \frac{2}{5}MR^2$ și atunci $\frac{d\omega}{dt} = \frac{5\mu g}{2R}$ și $\omega = \omega_0 + \frac{5}{2}\frac{\mu gt}{R}$. Dar, $\omega_0 = 0$ și $\omega = \frac{5}{2}\frac{\mu g}{R}t$. Viteza punctului adiacent cu planul orizontal este egală cu $v_{CM} - \omega R$. Cînd această viteză se anulează bila începe să se rostogolească fără translație. Acest lucru are loc după intervalul de timp $t_1 = \frac{2}{7}\frac{v}{\mu g}$. Distanța parcursă de bilă în acest timp este: $S = v_0t_1 - \frac{at_1^2}{2} = \frac{12}{49}\cdot\frac{v_0^2}{\mu g}$, iar viteza sa va fi $v = v_0 - \mu gt_1 = \frac{5}{7}v_0$.

1.217. Pentru ca să nu existe deplasare a centrului de greutate este necesar ca să existe relația: $T = Mg\sin\alpha$. Va trebui să determinăm accelerația corpului m necesară creării unei tensiuni egală cu cea dată de relația de mai sus. Legea conservării energiei se scrie:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mv^2}{2}\frac{R^2}{r^2} = mgh.$$ Dar, $v = at$ și $h = \frac{at^2}{2}$,

astfel încît accelerația a a corpului m va fi

$$a = \frac{mg}{m + M\frac{R^2}{r^2}}.$$

Cunoscînd accelerația corpului de masă m se poate scrie tensiunea,

$$T = m(g - a) = mg\frac{M\frac{R^2}{r^2}}{M\frac{R^2}{r^2} + m}$$ iar pentru sin α obținem expresia

$$\sin \alpha = \frac{1}{\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2}}.$$

În cazul nostru $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ deci $\alpha = 30°$. Se observă că pentru echilibrul centrului de greutate este necesară condiția $\frac{M}{m} + \frac{r^2}{R^2} \geqslant 1$.

1.8. Echilibrul mecanic al corpurilor

1.218. Atunci cînd corpul se află la baza suprafeței conice asupra sa acționează forța centrifugă maximă.
Condiția de echilibru proiectată pe axele Ox și Oy

$$F_f \cos \alpha - N \sin \alpha = m\omega^2 R, \quad (1)$$

$$F_f \sin \alpha + N \cos \alpha = mg, \quad (2)$$

unde N este reacțiunea suprafeței, iar $F_f = \mu N$ este forța de frecare.
Rezultă :

$$\mu = \frac{g \sin \alpha + \omega^2 R \cos \alpha}{g \cos \alpha - \omega^2 R \sin \alpha} > 0, \quad (3)$$

adică trebuie îndeplinită condiția

$$\mathrm{tg}\, \alpha < \frac{g}{\omega^2 R}. \quad (4)$$

1.219. În momentul ruperii firului din dreapta, forțele ce acționează asupra barei vor fi tensiunea $\vec{T}$ din firul din stînga și reacțiunile $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ datorate corpurilor m_1 și m_2 (normale pe bară).

Pentru bară se poate scrie : $\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{T} = 0$; $N_1 l = 2N_2 l$.
Din cea de-a doua relație se observă că reacțiunile $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$ sînt opuse, deci $\vec{N}_1 = -2\vec{N}_2$. Din prima relație scrisă scalar se obține : $T = N_1 - N_2 = N_2$.
În momentul ruperii firului din dreapta, accelerațiile a_1 și a_2 ale celor două corpuri sînt verticale și legate între ele prin relația : $a_2 = 2a_1$.
Ecuațiile de mișcare pentru cele două corpuri sînt :

$$m_1 g - N_1' = m_1 a_1, \quad m_2 g + N_2' = m_2 a_2,$$

unde $\vec{N}_1' = -\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2' = -\vec{N}_2$ conform legii acțiunii și reacțiunii.
Rezultă imediat $T = m_1 m_2\, g/(m_1 + m_2)$.

1.220. a) $\vec{M} = (8\vec{i} + 6\vec{j}) \times (30\vec{i} + 40\vec{j}) = 140\,\vec{k}$.

b) Momentul forței se poate scrie și sub forma :

$$|\vec{M}| = |\vec{b} \times \vec{F}| = |\vec{r} \times \vec{F}_t|,$$

unde F_t este componenta lui F perpendiculară pe r, iar b brațul forței F. Deci $b = \frac{M}{F} = 2{,}8$ m.

c) $F_t = \frac{M}{r} = \frac{M}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 14$ N.

1.221. Alegem axa Oy de-a lungul lui OP și axa Ox de-a lungul lui OM. Condițiile de echilibru ale componentelor forțelor de-a lungul celor două direcții se scriu : $F_x + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0$, $F_y + 50 - \frac{50}{\sqrt{2}} = 0$, de unde $F_x = F_y = -50\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} = -14{,}6$ N și $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 20{,}5$ N.
Momentul total al forțelor față de 0 trebuie să fie nul. Notînd cu l distanța față de O a punctului de aplicație a forței F rezultă : $F_y \cdot l = 50 \cdot 0{,}1$, de unde $l = 0{,}34$ m. Forța F este orientată paralel cu forța aplicată în O.

1.222. Reacțiunea din AC este $T_1 = G\, \mathrm{tg}\, \alpha = 50$N, cea din BC este $T_2 = G \cos \alpha = 100$ N. Dacă α crește T_1 crește și T_2 scade.

1.223. F_1 și F_2 sînt forțele de frecare dacă m_2 este pe punctul de a aluneca spre baza planului (fig. 1.223.R). Condițiile de echilibru se scriu:

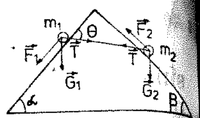

Fig. 1.223.R.

$$\mu(m_1 g\cos\alpha + T\sin\theta) + m_1 g\sin\alpha = T\cos\theta.$$

$$m_2 g\sin\beta = \mu[m_2 g\cos\beta + T\sin(\alpha+\beta-\theta)] + T\cos(\alpha+\beta-\theta),$$

de unde

$$\mathrm{tg}\,\theta =$$

$$= \frac{m_2(\sin\beta - \mu\cos\beta) - m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)[\cos(\alpha+\beta) + \mu\sin(\alpha+\beta)]}{\mu m_2(\sin\beta - \mu\cos\beta) + m_1(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)[\sin(\alpha+\beta) - \mu\cos(\alpha+\beta)]} =$$

$$= 3{,}26$$

și $\theta = 73°$, iar $T = \dfrac{m_1 g(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\theta - \mu\sin\theta} = 17{,}8$ N.

1.224. Notăm cu N forța de apăsare a unui braț asupra celuilalt. Forța de frecare va fi μN. Pentru ca cele două brațe să nu se deplaseze unul față de altul trebuie ca rezultantele forțelor verticale ce acționează asupra lui A și orizontale ce acționează asupra lui B să fie nule, adică:

$$\frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} - mg = 0; \quad -\frac{N}{\sqrt{2}} - \frac{\mu N}{\sqrt{2}} + F = 0,$$

de unde $N = \dfrac{\sqrt{2}mg}{1-\mu}$; $F = \dfrac{1+\mu}{1-\mu}\,mg.$

1.225. Condiția de echilibru pe direcțiile orizontală și verticală (fig. 1.225.R) se scrie:

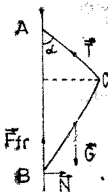

Fig. 1.225.R

$$N = T\sin\alpha, \quad (1);$$

$$G = F_{fr} + T\cos\alpha \quad (2).$$

Forța de frecare trebuie să fie mai mică decît forța de frecare de alunecare: $F_{fr} \leqslant \mu N$ (3).
Condiția de echilibru a momentelor forțelor față de punctul B se scrie:

$$\frac{G}{2}l\sin\alpha = T(l\cos\alpha + \sqrt{d^2 - l^2\sin^2\alpha})\sin\alpha \quad (4)$$

Înlocuind (1) și (2) în (4) se obține:

$$F_{fr}l\sin\alpha = N[2(l\cos\alpha + \sqrt{d^2 - l^2\sin^2\alpha}) - l\cos\alpha],$$

de unde,

$$\frac{F_{fr}}{N} = \frac{l\cos\alpha + 2\sqrt{d^2 - l^2\sin^2\alpha}}{l\sin\alpha}.$$

Ținînd seama de relația (3) rezultă $\mu \geqslant \dfrac{l\cos\alpha + 2\sqrt{d^2 - l^2\sin^2\alpha}}{l\sin\alpha}$.

1.226. a) Suma momentelor forțelor este egală cu momentul rezultantei, calculate față de același punct A.

$$\left(F_1 d_1 + F_2 d_2 + G\cdot\frac{l}{2} + F_3 d_3\right) = (F_1 + F_2 + G + F_3)x,$$

de unde rezultă x, punctul de aplicație al rezultantei.
b) Față de punctul de aplicație al rezultantei, avem

$$Px = Q(l - x), \quad P + Q = F_1 + F_2 + F_3 + G,$$

sistem din care se obțin P și Q.

1.227. În figura 1.227.R sînt reprezentate forțele care acționează asupra corpurilor de mase m și M. Forțele T_1, N_1, T_2 și N_2 reprezintă componentele forțelor cu care acționează bara asupra corpurilor. Forțele N_1 și N_2 acționează în sensuri opuse deoarece momentul lor total trebuie să fie nul, bara fiind fără greutate: $N_1 b + N_2(a+b) = 0$.
Ecuațiile de mișcare ale celor două mase se scriu:

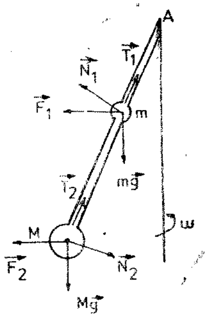

Fig. 1.227.R.

$$\vec{F}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m\vec{g} = 0; \quad \vec{F}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + M\vec{g} = 0.$$

Proiecțiile acestor ecuații pe o direcție orizontală și verticală sînt:

$$m\omega^2 b\sin\varphi + N_1\cos\varphi = T_1\sin\varphi; \quad N_1\sin\varphi + T_1\cos\varphi = mg;$$

$$M\omega^2(a+b)\sin\varphi = N_2\cos\varphi + T_2\sin\varphi; \quad T_2\cos\varphi = N_2\sin\varphi + Mg,$$

de unde

$$\cos\varphi = \frac{mb + M(a+b)}{mb^2 + M(a+b)^2}\,\frac{g}{\omega^2}.$$

1.228. a) Condiția de echilibru a forțelor este : $\vec{F}+\vec{G}+\vec{T}=0$ (1) ale cărei proiecții pe direcțiile orizontală și verticală sînt :

$$F\cos\beta = T\cos\alpha \quad (2); \qquad F\sin\beta + T\sin\alpha - G = 0 \quad (3).$$

Condiția de echilibru a momentelor forțelor se scrie :

$$Gl/2 = T\sin\alpha \quad (4), \text{ adică, } T = mg/2\sin\alpha.$$

Pe de altă parte, $T = k\,\Delta l_0 = mg/2\sin\alpha$, de unde rezultă :

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{2k\sin\alpha} = 2\cdot10^{-2}\ \text{m}.$$

b) Din relațiile (2) și (3) eliminînd pe β rezultă

$$F = \sqrt{T^2 + G^2 - 2GT\sin\alpha} = 200\ \text{N}.$$

c) $$\operatorname{tg}\beta = \frac{G - T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3};\quad \beta = 30^\circ = \alpha.$$

1.229. a) La echilibru (fig. 1.229) avem

$$T_1 + T_2 = G \quad (1);\quad T_1x = T_2(l - x) \quad (2).$$

Alungirile Δl_1 și Δl_2 sînt $\Delta l_1 = \frac{T_1}{k_1}$; $\Delta l_2 = \frac{T_2}{k_2}$ iar $\Delta l_1 - \Delta l_2 = l\sin\alpha$ astfel încît

$$\frac{T_1}{k_1} - \frac{T_2}{k_2} = l\sin\alpha \quad (3).$$

Din relațiile (1), (2) și (3) se obține : $T_1 = \frac{(G + k_2 l\sin\alpha)k_1}{k_1 + k_2} = 686$ N ;

$$T_2 = G - T_1 = 294\ \text{N}.\quad x = \frac{T_2 l}{T_1 + T_2} = 0{,}32\ \text{m}.$$

b) Corpul nu alunecă pe scîndură dacă $G_t \leqslant F_f$, sau $mg\sin\alpha \leqslant \mu\, mg\cos\alpha$ adică $\mu \geqslant \operatorname{tg}\alpha$. Deci, $\mu_{min} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}576.$

c) Pentru ca scîndura să fie orizontală ($\alpha = 0$) este necesar ca $\Delta l_1 = \Delta l_2$, adică $\frac{T_1'}{k_1} = \frac{T_2'}{k_2}$ (4), care alături de relația $T_1' + T_2' = G$ conduce la $T_1' = \frac{k_1 G}{k_1 + k_2} = 392$ N ; $T_2' = 588$ N.

Din egalarea momentelor avem : $T_2'(l - y) = T_1'y$ și rezultă $y = \frac{T_2' l}{T_1' + T_2'} = 0{,}6$ m.

d) Din relația (3) rezultă : $\sin\alpha = \frac{1}{l}\left(\frac{T_1}{k_1} - \frac{T_2}{k_2}\right)$. Pe de altă parte, din sistemul de ecuații (1) și (2) avem :

$$T_1 = G\frac{l - x}{l};\quad T_2 = G\frac{x}{l}$$

și rezultă

$$\sin\alpha = \frac{G}{l^2}\left(\frac{l - x}{k_1} - \frac{x}{k_2}\right) = 1 - \frac{5}{3}\,\frac{x}{l}.$$

Se constată că α scade cînd x crește și se anulează pentru $x = \frac{3}{5}l = 0{,}6$ m. Dacă x crește în continuare scîndura se apleacă în partea capătului B.

1.230. a) Analizăm cazul reprezentat în figura 1.230.a.R.

$G_1 = m_1 g = \rho_1 V g = \rho_1 g a^3$; $G_2 = \rho_2 g a^3$.

Calculăm poziția centrului de greutate

$$G_1(a - x) = G_2 x,\quad \rho_1(a - x) = \rho_2 x$$

de unde $x = \frac{\rho_1 a}{\rho_1 + \rho_2} = 9{,}57$ cm.

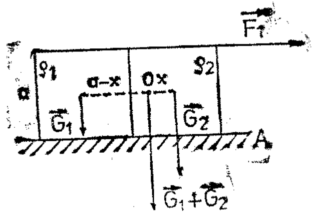

Fig. 1.230.a.R.

Din egalarea momentelor față de punctul A, rezultă

$$G_1\cdot\frac{3a}{2} + G_2\cdot\frac{a}{2} = F_1 a \text{ sau}$$

$$F_1 = \frac{(3G_1 + G_2)}{2} = \frac{ga^3(2\rho_1 + \rho_2)}{2} = 1276\ \text{N}.$$

Lucrul mecanic necesar pentru răsturnare este egal cu diferența energiilor potențiale

$$L = (\rho_1 + \rho_2)ga^3\cdot AO - (\rho_1 + \rho_2)ga^3\cdot\frac{a}{2} = 156{,}48\ \text{J}.$$

Este necesar să se consume lucrul mecanic pentru răsturnare numai pentru a aduce punctul O pe verticala ce trece prin A, căci în continuare corpul va cădea singur.

b) $F_2 \cdot 2a = (G_1 + G_2)\dfrac{a}{2}$ (fig. 1.230.b.R) de unde

$$F_2 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)a^3 g}{4} = 326 \text{ N};$$

$$L = (W_p)_B - (W_p)_O = (G_1 + G_2)(OB - OP) =$$
$$= (\rho_1 + \rho_2)\, a^3 g \cdot (OA - OP) = 31{,}4 \text{ J};$$

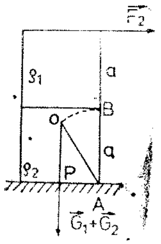

Fig. 1.230.b.R.

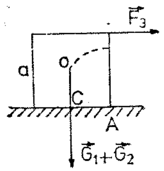

Fig. 1.230.c.R.

c) $F_3 a = (G_1 + G_2)\dfrac{a}{2}$ (fig. 1.230.c.R)

$$F_3 = \frac{(\rho_1 + \rho_2)a^3 g}{2} = 652 \text{ N};$$

$$L = (W_p)_B - (W_p)_O = (G_1 + G_2)(AB - OC) =$$
$$= (\rho_1 + \rho_2)\, a^3 g \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{a}{2}\right) = 52{,}16 \text{ J}.$$

1.231. Forțele care acționează și sensurile lor sînt reprezentate în figura 1.231.R. Notînd reacțiunile cu N_A și N_C iar α unghiul făcut de bară cu poziția de echilibru, condițiile de echilibru sînt

$$\sum_i X_i = 0;\ N_A - N_C \sin\alpha = 0 \quad (1),$$

$$\sum_i Y_i = 0;\ N_C \cos\alpha - Q - P = 0 \quad (2).$$

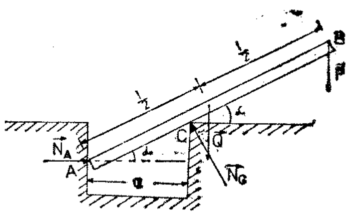

Fig. 1.231.R.

Din relațiile (1) și (2) se obține:

$$N_C = \frac{P + Q}{\cos\alpha};\quad N_A = (P + Q)\,\text{tg}\,\alpha \quad (3).$$

Unghiul α se obține scriind ecuația de echilibru a momentelor forțelor față de punctul C:

$$Q\left(\frac{l}{2}\cos\alpha - a\right) + P(l\cos\alpha - a) = N_A \cdot a\,\text{tg}\,\alpha \quad (4).$$

Din relațiile (3) și (4) rezultă unghiul α pentru condiția de echilibru

$$\cos\alpha = \sqrt[3]{\frac{2(P + Q)a}{(2P + Q)l}}.$$

1.232. Cilindrul B se află în echilibru sub acțiunea forțelor reprezentate în figura 1.232.a.R. Condițiile de echilibru se scriu $N\cos\alpha - F = 0$ și $N\sin\alpha - G_B = 0$, unde $\sin\alpha = \dfrac{r}{R + r} = \dfrac{5}{13}$

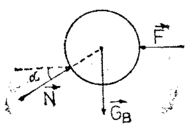

Fig. 1.232.a.R.

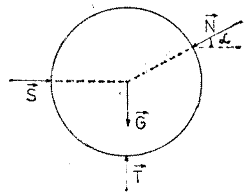

Fig. 1.232.b.R.

și $\cos\alpha = \dfrac{12}{13}$. Atunci, $N = 78$ kN și $F = 72$ kN. Cilindrul A se află în echilibru sub acțiunea forțelor reprezentate în figura 1.232.b.R. Condițiile de echilibru se scriu: $S - N\cos\alpha = 0$, $T - G - N\sin\alpha = 0$, de unde $S = 72$ kN și $T = 70$ kN.

1.233. Forțele care acționează sînt reprezentate în figura 1.233.R. Condițiile de echilibru se scriu: pentru forțe: $R_x + T\cos\alpha + F\cos\beta = 0$; $R_y - G + T\sin\alpha - F\sin\beta = 0$ și pentru momente, $T.AK - G.AC - F.AM = 0$, unde $AC = 2$ m, $AK = AD\sin\alpha = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ m și $AM = AB\sin\beta = 2\sqrt{3}$ m. Înlocuind aceste valori rezultă, $T = 420$ N și $R_x = -396$ N, $R_y = -23$ N.

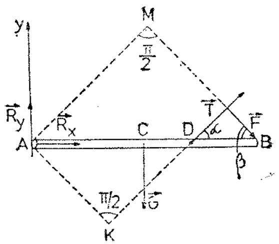

Fig. 1.233.R.

1.234. Ținînd seama de forțele ce acționează asupra corpurilor, așa cum se vede în figura 1.234.R, condiția de echilibru a primului

corp, proiectată pe două axe (orizontală şi verticală), se scrie:

$$T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = m\omega^2 l \sin \alpha \quad (1);$$

$$T_1 \cos \alpha - T_2 \cos \beta = mg \quad (2).$$

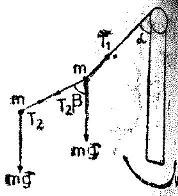

Fig. 1.234.R.

Pentru cel de-al doilea avem:

$$T_2 \sin \beta = m\omega^2 l(\sin \alpha + \sin \beta) \ (3);$$

$$T_2 \cos \beta = mg \quad (4).$$

Dacă eliminăm tensiunile T_1 şi T_2 se obţin relaţiile:

$$\frac{\omega^2 l}{g} \sin \alpha = 2\mathrm{tg}\, \alpha - \mathrm{tg}\, \beta \ (5); \quad \frac{\omega^2 l}{g}(\sin \alpha + \sin \beta) = \mathrm{tg}\, \beta \quad (6)$$

Din (5) şi (6) rezultă că: $2\mathrm{tg}\, \alpha - \mathrm{tg}\, \beta < \mathrm{tg}\, \beta$ sau $\alpha < \beta$.

1.235. Forţele care acţionează sînt reprezentate în figura 1.235.R. Condiţia de echilibru a forţelor se scrie: $R_A + R_B - G - Q = 0$ iar a momentelor forţelor în raport cu punctul A, $R_B \cdot 3a - G \cdot 2a + Q \cdot a = 0$, de unde $R_B = \frac{G}{2}$ şi $R_A = G$.

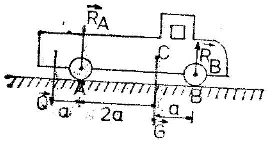

Fig. 1.235.R.

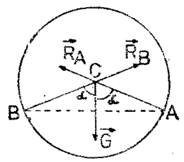

Fig. 1.236.R.

1.236. Forţele care acţionează asupra sferei sînt reprezentate în figura 1.236.R. Deplasînd forţele de-a lungul suporturilor lor observăm că formează un triunghi echilateral astfel că

$$|\vec{R}_A| = |\vec{R}_B| = |\vec{G}| = 20 \text{ N}.$$

1.237. Forţele care acţionează asupra sistemului sînt reprezentate în figura 1.237.a.R. Din geometria figurii 1.237.a.R se observă că $AS = 2r \cos 2\alpha = a \cos \alpha$, de unde

$$\cos \alpha = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 32\, r^2)}}{8r}.$$

Dar cum $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, rezultă că $0 < \cos \alpha < 1$ şi alegem semnul plus astfel că $\cos \alpha = \frac{(a + \sqrt{a^2 + 32\, r^2})}{8r}$.

Deplasînd forţele de-a lungul suporturilor lor observăm că formează triunghiul reprezentat în figura 1.237.b.R, de unde rezultă că

$$\frac{G}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{R_A}{\sin \alpha} = \frac{R_B}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}$$

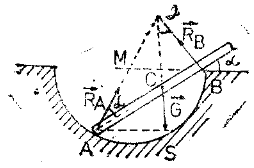

Fig. 1.237.a.R

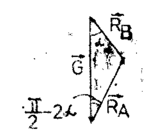

Fig. 1.237.b.R.

adică $\quad R_A = G\, \mathrm{tg}\, \alpha \quad$ şi $\quad R_B = G \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}$.

1.238. a) Condiţia de echilibru pentru corpul G_2 se scrie:

$$\vec{G}_2 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \quad (1),$$

unde $\vec{T}_1$ este tensiunea din firul AC şi $\vec{T}_2 = \vec{G}_1$ (2). Proiectînd relaţia (1) pe axele Ox şi Oy rezultă:

$$T_1 \sin 45° = G_1 \sin \beta, \ (3), \quad T_1 \cos 45° + G_1 \cos \beta = G_2. \quad (4)$$

Eliminînd T_1 din (1) şi (2) se obţine: $\sin \beta = 1/2$, deci $\beta = 30°$.
b) Introducînd β din relaţia (1) rezultă: $T_1 = 10$ N.
c) $R = G_1\sqrt{3} = 24{,}4$ N.

1.239. Considerăm axa Ox orientată în sensul deplasării plutei şi cu originea în punctul de plecare al omului cu masa m_1. Coordonatele centrului de masă al sistemului la începutul mişcării vor fi:

$$x_{cm} = \frac{Ml/2 + m_2 l}{m_1 + m_2 + M} \quad (1).$$

Fie x distanţa parcursă de plută în momentul cînd omul cu masa m_1 a parcurs lungimea l, iar cel cu masa m_2 s-a deplasat la jumătatea plutei.

Centrul de masă va avea acum coordonata:

$$x'_{cm} = \frac{m_1(l - x) + m_2[(l/2) - x] + M[(l/2) - x]}{m_1 + m_2 + M} \quad (2).$$

Impulsul sistemului se conservă. Dar masa sistemului rămînînd constantă şi viteza sistemului la început fiind nulă rezultă că viteza

trebuie să fie nulă și la sfîrșit. Aceasta înseamnă că poziția centrului de masă nu s-a modificat. Din condiția $x_{cm} = x'_{cm}$ se obține deplasarea

$$x = \frac{[m_1 - (m_2/2)]l}{m_1 + m_2 + M} \quad (3).$$

1.240. În figura 1.240.R sînt înfățișate forțele ce acționează asupra corpului. Corpul se află în echilibru față de sol, astfel încît proiecțiile rezultantei forțelor pe direcțiile orizontală și verticală sînt nule, adică:

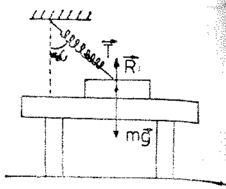

Fig. 1.240.R.

$F_{fr} - T\sin\alpha = 0$ (1), $T\cos\alpha + R - mg = 0$ (2),

unde $F_{fr} = \mu R$ (3) și $T = k(l - l_0) = kl_0\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right)$ (4).

Înlocuind relațiile (3) și (4) în (1) și (2) rezultă:

$$\mu = \frac{kl_0(1 - \cos\alpha)\sin\alpha}{mg\cos\alpha - kl_0\cos\alpha(1 - \cos\alpha)} = 0{,}19.$$

1.241. Poziția centrului de masă este dată de

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Alegem ca origine a sistemului de coordonate centrul discului. Masa discului este $M = \pi R^2 d\rho$ unde d este grosimea sa, iar masa discului care a fost scos pentru a forma orificiul circular, $m = \pi r^2\rho d$. În formula centrului de masă se va lua masa orificiului cu semn minus (se consideră că pentru a realiza orificiul s-a acționat cu o forță egală cu mg în sens opus greutății), astfel că

$$x_{CM} = \frac{-mx_1}{M - m} = \frac{-Rr^2}{2(R^2 - r^2)}.$$

Poziția centrului de masă se află în stînga lui O.

1.242. Împărțim semicercul în triunghiuri isoscele ca în figura 1.242.R. Centrul de masă al fiecărui triunghi este la distanță $\frac{2}{3}h$ de punctul O, unde h este apotema. Cînd numărul de triunghiuri crește la infinit, centrul de masă al fiecărui triunghi va fi distanța $\frac{2}{3}R$ față de O. Problema

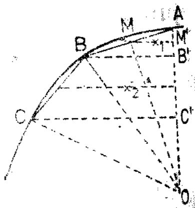

Fig. 1.242.R.

se reduce la a calcula centrul de masă al unei sîrme semicirculare cu raza $R' = \frac{2}{3}R$. În figura 1.242.R semicercul AN este împărțit în segmente egale, centrul de masă al fiecărui segment fiind la jumătatea sa. Notăm pozițiile centrelor de masă ale segmentelor cu $x_1, x_2, \ldots$. Considerînd că segmentele au densitatea unității de lungime ρ suma momentelor lor față de O va fi:

$$\sum_i M_i = \rho g(AB.x_1 + BC.x_2 + CD.x_3 + \ldots).$$

Din asemănarea triunghiurilor AMM' și AMO se obține: $AB/h = AB'/x_1$ sau $AB.x_1 = AB'h$. Suma momentelor față de O se mai scrie: $\sum_i M_i = \rho gh(AB' + B'C' + \ldots) = \rho gh2R'$. Dacă semicercul se împarte într-un număr infinit de segmente atunci $h \to R$ și deci $\sum_i M_i = 2R'^2 g\rho$. În același timp, momentul este dat de produsul dintre greutatea sîrmei $(\pi R'\rho)$ și distanța de la O la centrul de greutate, x. Deci $2R'^2 g\rho = \pi R\rho x$ de unde $x = 2R'/\pi$. Dar, $R' = 2R/3$ și rezultă că: $x = \frac{4R}{3\pi}$.

1.243. Forțele ce acționează asupra cutiei sînt reprezentate în figura 1.243.R. Condițiile de echilibru pentru forțe se scriu: $F\cos\alpha = F_{fr}$ și $N + F\sin\alpha = G$. În momentul începerii mișcării $F_{fr} = \mu N$. Din cele trei relații se obține: $F = \frac{\mu G}{(\cos\alpha + \mu\cos\alpha)}$. Valoarea minimă a lui F se obține atunci cînd numitorul este maxim. Introducem unghiul de frecare $\operatorname{tg}\varphi = \mu$ și numitorul se scrie:

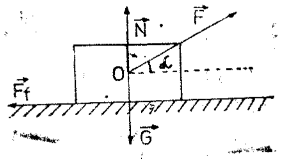

Fig. 1.243.R.

$$\cos\alpha + \operatorname{tg}\varphi\cdot\sin\alpha = \frac{\cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi} = \sqrt{1 + \mu^2}\cos(\alpha - \varphi).$$

Valoarea maximă a lui $\cos(\alpha - \varphi)$ este unu deci,

$$F_{\min} = \frac{\mu G}{\sqrt{1 + \mu^2}} \text{ și rezultă } \mu = \frac{F}{\sqrt{G^2 - F^2}} = 0{,}75.$$

1.244. a) Se scrie ecuația de echilibru a momentelor în raport cu punctul A.

$$G\cdot\frac{l}{2} - N\frac{3l}{4} - mgl\sin\alpha = 0.$$

Rezultă $N = \frac{4}{3}\left(\frac{G}{2} - mg\sin\alpha\right) = \frac{2}{3}(G - mg)$.

b) Se scrie din nou condiţia de echilibru a momentelor faţă de A, ţinînd seama că $N = 0$:

$$G \cdot \frac{l}{2} - Tl \sin \alpha = 0 \quad (1),$$

unde T reprezintă tensiunea maximă în fir (care se obţine la trecerea firului prin poziţie verticală). Pentru determinarea tensiunii maxime se scrie legea conservării energiei mecanice: $\frac{mv^2}{2} = mgl(1 - \cos \theta)$

Valoarea maximă a tensiunii este:

$$T = mg + \frac{mv^2}{l} = mg + 2mg(1 - \cos \theta) = mg(3 - 2\cos \theta).$$

Introducînd T din (1) rezultă: $G \cdot \frac{l}{2} = mg(3 - 2\cos \theta)\sin \alpha$

de unde se obţine: $\theta = \frac{3}{2} - \frac{G}{4mg \sin \alpha} = \frac{3}{2} - \frac{G}{2mg}$.

Se observă că trebuie îndeplinită condiţia $G \geqslant mg$ pentru ca $\cos \theta \leqslant 1$.

1.245. Bilele fiind identice din legea conservării impulsului se obţine:

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3.$$

Considerînd că bila superioară (fig. 1.245.R) este cea care a fost îndepărtată, atunci din motive de simetrie celelalte două bile vor avea viteze egale în modul ($\vec{u}_2$ şi $\vec{u}_3$) îndreptate în sensul lui $\vec{v}$.

Din legile de conservare a impulsului şi energiei se obţine:

$$v = 2u_2 \cos \alpha - u_1 \quad (1) \quad \text{şi}$$

$$mv^2 = 2mu_2^2 + mu_1^2 \quad (2).$$

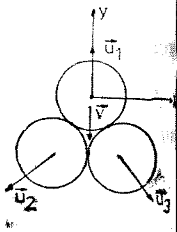

Fig. 1.245.R.

Din rezolvarea ecuaţiilor se obţine:

$$u_2 = u_3 = \frac{2v \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha + 1}; \quad u_1 = \frac{(2\cos^2\alpha - 1)v}{2\cos^2\alpha + 1}.$$

1.246. Dacă G_1 coboară cu h atunci G_2 va urca cu $\frac{2h}{3}$ (deoarece F coboară cu $\frac{h}{3}$). Scriind legea conservării energiei avem:

$$G_1 h = G_2 \cdot 2h/3 \text{ deci } G_2 = 3\, G_1/2 = 6\text{N}.$$

1.247. a) Pentru echilibru este necesar ca să existe relaţiile (fig. 1.247.a.R): $N_1 = F_{fr}$; $N_2 = mg$. Ecuaţia de echilibru a momentelor forţelor faţă de punctul B se scrie: $N_1 \cos \alpha = mg \frac{\sin \alpha}{2}$.

Deci $F_{fr} = mg \frac{\operatorname{tg} \alpha}{2}$.

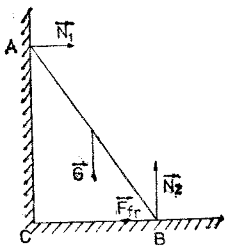

Fig. 1.247.a.R.

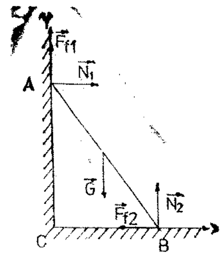

Fig. 1.247.b.R.

Deoarece în cazul echilibrului $F_{fr} \leqslant \mu N_2$ rezultă că $\operatorname{tg}\alpha \leqslant 2\mu$.

b) Condiţiile de echilibru pentru forţe şi momentele acestora faţă de punctul B sînt (fig. 1.247.b.R)

$$F_{fr_1} + N_2 = mg; \quad N_1 = F_{fr_2};$$

$$F_{fr_1} \sin \alpha + N_1 \cos \alpha = mg \frac{1}{2} \sin \alpha.$$

Forţele de frecare trebuie să satisfacă inegalităţile:

$$F_{fr_1} \leqslant \mu N_1 \quad \text{şi} \quad F_{fr_2} \leqslant \mu N_2.$$

Introducînd aceste inegalităţi în condiţiile de echilibru se obţine:

$\operatorname{ctg} \alpha \geqslant \frac{N_2}{2N_1} - \frac{\mu}{2}$.

Deoarece $\mu N_2 = N_1$ se poate scrie $\operatorname{ctg} \alpha \geqslant \frac{1 - \mu^2}{2\mu}$.

1.248. a) deplasare spre stînga.

În figura 1.248.R sînt prezentate forţele ce acţionează asupra barei.

Scriem ecuaţia momentelor în raport cu articulaţia:

$$G \frac{l}{2} \sin \alpha - Nl \sin \alpha - \mu Nl \cos \alpha = 0$$

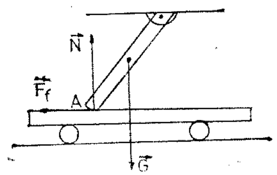

Fig. 1.248.R.

se obţine:

$$N = \frac{G \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}$$

și deci $$F = F_f = \mu N = \frac{\mu G \sin\alpha}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

b) deplasare spre dreapta

Se obține în mod similar : $F = F_f = \dfrac{\mu G \cos\alpha}{2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$.

Observăm că este necesar ca $\operatorname{tg}\alpha > \mu$, altfel cărucioarul nu poate mișcat.

1.249. În figura 1.249.R sînt înfățișate forțele ce acționeaz asupra cilindrului inferior din stînga. F_{f_1} este forța de frecare dint cilindrii, F_{f_2} — forța de frecare dintre cilindrii și suprafața orizontală, F este forța datorată presiunii exercitată de cilindrul superior, G — greutatea unui cilindru și N — forța de reacțiune din partea suprafeței orizontale. Se poate scrie :

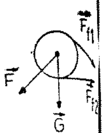

Fig. 1.249.

$F_{f_1}r - F_{f_2}r = 0$ (1) și $F_{f_1} + F_{f_2}\cos 30° - F\cos 60° = 0$ (2).

Se vede că $F_{f_1} = F_{f_2} = \mu F$.
Înlocuind în (2) obținem :

$$\mu \geqslant \frac{\cos 60°}{1 + \cos 30°} = 2 - \sqrt{3}.$$

1.250. Dacă bara BC acționează cu forța f asupra barei D atunci DC va acționa cu o forță de sens contrar și de aceeași mărim asupra barei BC conform legii a treia a lui Newton. Componen verticală a forței f este echilibrată de componenta forței din part lui CD. Forța cu care bara CD acționează asupra barei DE are

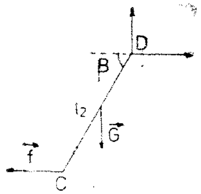

Fig. 1.250.a.R.

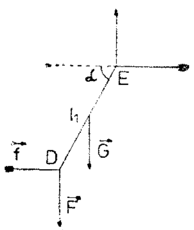

Fig. 1.250.b.R

componentă verticală și una orizontală (fig. 1.250.a.R). Bara CD fiind în echilibru avem $f = f'$ și deci ecuația de moment scrisă în raport cu punctul D este : $f\sin\beta \cdot l_2 = mg\dfrac{\cos\beta}{2} l_2$ sau $\operatorname{tg}\beta = mg/2f$ (1).

În figura 1.250.b.R sînt prezentate forțele ce acționează asupra barei DE. Momentul față de punctul E este zero, deci,

$$f\sin\alpha \cdot l_1 = F\cos\alpha \cdot l_1 + mg\frac{\cos\alpha}{2} l_1.$$

Din echilibrul forțelor ce acționează asupra lui DE rezultă $F = mg$, ceea ce face ca ecuația de mai sus să devină $\operatorname{tg}\alpha = 3mg/2f$ (2). Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\operatorname{tg}\alpha = 3\operatorname{tg}\beta$.

1.9. Mecanica fluidelor

1.251. $h = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, unde $a = g\left(1 - \dfrac{F_A}{mg}\right) = g\left(1 - \dfrac{\rho_a}{\rho_c}\right)$.

Deci, $h = v_0 t + \dfrac{g}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_a}{\rho_c}\right)t^2$,

sau $\rho_c = \rho_a \dfrac{gt^2}{gt^2 - 2h + 2v_0 t} = 2{,}33 \cdot 10^3\ \text{kg/m}^3$.

1.252. Greutatea aerului și balonului fiind $\rho_1 gV + G$ condiția de echilibru a balonului se scrie :

$$g\rho_1 V + G = g\rho_1 V_1 + g\rho_2(V - V_1),$$

unde V_1 este volumul aerului din amestec. Deci, $V_1 = V + \dfrac{G}{g(\rho_1 - \rho_2)} = 2{,}8\ l$, și deci $\dfrac{V_1}{V - V_1} = 1{,}21$.

1.253. Echilibrînd greutățile omului și colacului cu forța arhimedică rezultă :

$$m_1 g + mg = \left[\frac{m_1}{\rho_1}(1 - n) + \frac{m}{\rho_3}\right]\rho_2 g, \text{ de unde}$$

$$m = \frac{m_1[\rho_2(1 - n) - \rho_1]\rho_3}{(\rho_3 - \rho_2)\rho_1} = 2{,}73\ \text{kg}.$$

1.254. a) $a = \dfrac{R}{m_c} = \dfrac{F_A - G}{m_c} = \dfrac{(\rho_a - \rho_c)g}{\rho_c} = 6\ \text{m/s}^2$.

b) $h_1 = v_1 t + \dfrac{at^2}{2} = 4t + 3t^2$; $t = 2\text{s}$; $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2ah_1} = 16\ \text{m/s}$.

c) $h_{max} = \frac{v_2^2}{2g} = 12{,}8$ m.

d) Viteza la suprafaţa apei, în cădere de la h_{max} este $v_3 = v_2 = 16$ m/s.

Mişcarea prin fluid este uniform încetinită cu acceleraţia

$$a = 6 \text{ m/s}^2 \text{ şi } h_{opr} = \frac{v_2^2}{2a} = 20 \text{ m}.$$

e) La echilibru $G = F_A$; $\rho_c(V_1 + V_2)g = \rho_a V_2 g$,

deci $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_c} = 0{,}6$.

1.255. Din condiţiile de echilibru pentru cele două corpuri (fig. 1.255.R)

$T - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = ma$;

$mg - F_A - T = ma$,

rezultă $F_A = \rho_l V_c g = \frac{\rho_l}{\rho_c} mg$,

de unde $a = \frac{g}{2}\left(1 - \sin\alpha - \mu\cos\alpha - \frac{\rho_l}{\rho_c}\right) = 0{,}35$ m/s²

şi $T = m(a + g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha) = 8{,}97$ N.

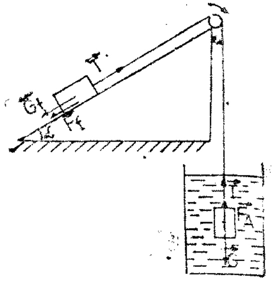

Fig. 1.255.R.

1.256. a) Din condiţia de plutire:

$$mg + V\rho_p g = \frac{m}{\rho_c}\rho_a g + \frac{V}{2}\rho_a g,$$

rezultă că $m = \frac{V\rho_c(\rho_a - 2\rho_p)}{2(\rho_c - \rho_a)} = 5725$ kg.

b) $T = mg\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) + Vg\left(\rho_p - \frac{\rho_a}{2}\right) = 0.$

1.257. a) Acceleraţia sistemului $a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$, iar viteza la suprafaţa apei, $v = \sqrt{2a_1 h} = 2{,}58$ m/s;

b) Acceleraţia sistemului în apă va fi:

$$a_2 = \frac{(m_2 - m_1)g - \frac{m_2}{\rho}\rho_{apă} g}{m_1 + m_2}$$

şi adîncimea $h_2 = v^2/2a_2 = 0{,}025$ m

c) $h_3 = v^2/2g = 0{,}33$ m;

d) $t = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} + 2\frac{v}{a_2} + \frac{v}{g} = 1{,}87$ s.

1.258. Notînd cu m masa areometrului (fig. 1.258.R) condiţia de echilibru în apă se scrie:

$$mg = \rho_0 Vg + \rho_0 Sl_0 g \quad (1),$$

iar în lichidul cu ρ_{min}: $mg = \rho_{min}Vg + \rho_{min}Slg$ (2).

Din relaţiile (1) şi (2) se obţine, $\rho_{min} = \frac{V + Sl_0}{V + Sl}\cdot\rho_0$.

În lichidul de densitate maximă, tija rămîne afară astfel încît, $mg = \rho_{max}Vg$ (3).

Din relaţiile (1) şi (3) avem: $\rho_{max} = \frac{\rho_0(V + Sl_0)}{V}$.

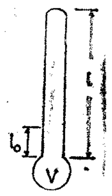

Fig. 1.258.R.

1.259. a) Acceleraţia corpului în apă este:

$$a = \frac{F_A - G}{m} = \frac{g(\rho_a - \rho_c)}{\rho_c}$$

iar durata urcării $t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2\rho_c}{g(\rho_a - \rho_c)}} = 1$s.

b) Condiţia de plutire se scrie:

$$(V - v)\rho_a g = V\rho_c g, \text{ de unde } \frac{v}{V} = \frac{\rho_a - \rho_c}{\rho_a} = 0{,}6.$$

c) Lucrul mecanic efectuat pentru introducerea corpului în apă este: $L = (F_A - G)h = 127{,}4$ J.

1.260. a) Din $G_1 = mg - \frac{m}{\rho_c}\rho_1 g$ şi $F_2 = \frac{m}{\rho_c}\rho_2 g$ rezultă: $\rho_c = \rho_1 + \rho_2\frac{G_1}{F_2} = 8000$ kg/m³.

b) $m = \frac{F_2\rho_c}{\rho_2 g} = 1$ kg.

c) Înainte de a se imprima mişcarea de rotaţie, legea lui Hooke se scrie:

$$\frac{(l - l_0)}{l_0} = \frac{1}{E}\cdot\frac{mg}{S}, \text{ de unde } l_0 = \frac{ES}{(mg + ES)}.$$

După imprimarea mişcării de rotaţie aceeaşi lege se scrie

$$\frac{l_m - l_0}{l_0} = \frac{1}{E}\,\frac{mg + m\omega^2 l_m}{S},$$

de unde $l_m = \frac{l(mg + ES)}{mg + ES - m\omega^2 l} = 1{,}524595$ m.

1.261. a) Notînd volumul aflat în lichidul superior cu V_1, iar cel aflat în lichidul inferior cu V_2, condiția de echilibru se scrie:

$$(V_1 + V_2)\rho g = V_1\rho_1 g + V_2\rho_2 g, \text{ unde } V_1 + V_2 = V.$$

Deci, $V_1 = V\dfrac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}$ și $V_2 = V\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$.

b) $V_1 = V_2$ și $V\dfrac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} = V\dfrac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}$ deci, $\rho = \dfrac{\rho_1 + \rho_2}{2} =$

$$= 7{,}25 \text{ kg/dm}^3.$$

1.262. a) Lichidul fiind incompresibil (fig. 1.262.R) $S_1h_1 = S_2h_2$ (1), unde h_1 și h_2 sînt deplasările lichidului la o singură apăsare. La echilibru, presiunile exercitate pe cele două suprafețe sînt egale $\dfrac{F_1}{S_1} = \dfrac{F_2}{S_2}$ (2).

La n apăsări pe un piston, deplasările totale vor fi:

$$H_1 = nh_1;\ H_2 = nh_2 \quad (3).$$

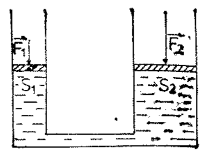

Fig. 1.262.R.

Din relațiile (1), (2) și (3) avem

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{H_2}{nh_1} = \frac{nh_2}{H_1} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \quad (4),$$

unde d_1 și d_2 sînt diametrele pistoanelor. Randamentul presei hidraulice este $\eta = \dfrac{L_u}{L_c} = \dfrac{F_2H_2}{P_ct} = \dfrac{F_2nh_2}{P_ct}$ (5).

Din relația $\dfrac{h_2}{h_1} = \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$ și relația (5) avem:

$$\eta = \frac{F_2nh_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2}{P_ct}; \quad P_c = \frac{F_2nh_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2}{\eta t} = 1875 \text{ W}.$$

b) Din relația (2) avem: $H_2 = nh_1\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0{,}3$ m.

c) $F_1 = F_2\left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2 = 4\cdot 10^5\cdot 10^{-2} = 4000$ N.

1.263. Folosind relațiile (5) din problema (1.262) avem succesiv

$$\eta = \frac{L_2}{L_1} = \frac{F_2H_2}{P_1t} = \frac{F_2nh_1\left(\dfrac{S_1}{S_2}\right)}{P_1t} = \nu_1\frac{F_2h_1}{P_1}\left(\frac{S_1}{S_2}\right);$$

de unde $\nu_1 = \dfrac{\eta P_1}{F_2h_1}\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right) = 0{,}12\ s^{-1}$.

1.264. Scriind egalitatea momentelor forțelor față de punctul O se obține că (fig. 1.264.R); $F_1 = 10F$. Pe de altă parte (vezi problema 1.262)

$$\eta = \frac{L_2}{L_1} = \frac{F_2h_2}{L_1} = \frac{F_1\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2h^2}{L_1} = \frac{10\,F\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2h_2}{L_1}$$

de unde rezultă: $L_1 = \dfrac{10F\left(\dfrac{d_2}{d_1}\right)^2h_2}{\eta} = 5\cdot 10^5$ J și

$$F_2 = F_1\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 10F\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 = 4\cdot 10^5 \text{ kg}.$$

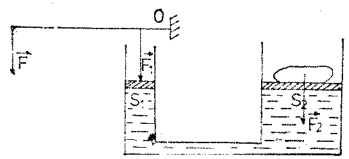

Fig. 1.264.R.

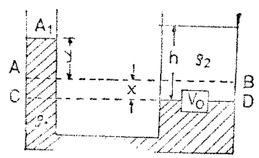

Fig. 1.265.R.

1.265. După introducerea corpului în vasul cu diametrul mare (fig. 1.265.R) nivelul mercurului se ridică cu x în ambele ramuri ocupînd poziție pe linia AB. Înălțimea coloanei de apă se obține scriind egalitatea presiunilor la nivelul de contact dintre apă și mercur (CD);

$$(y + x)\rho_1 g = h\rho_2 g \quad (1).$$

Notăm cu V_2 volumul corpului aflat în mercur în cazul cînd acesta este complet acoperit cu apă. Este evident că:

$$V_2 = (x + y)A_1 \quad (2).$$

Legea lui Arhimede scrisă în cazul cînd corpul este acoperit de apă este

$$V_0\rho_0 g = V_2\rho_1 g + (V_0 - V_2)\rho_2 g \quad (3).$$

Rezolvînd cele trei ecuații se obține: $h = \dfrac{\rho_1(\rho_0 - \rho_2)V_0}{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)A_1}$.

1.266. În timpul curgerii suprafața apei este perpendiculară pe rezultanta forțelor (fig. 1.266R). Volumul maxim ocupat de apă va fi $V = \frac{bAc}{2l}$ iar masa sistemului, $M_s = M + \frac{bAc}{2}\rho$. Pentru un element de masă Δm condiția de echilibru se scrie $\Delta m \cdot a = \Delta m \cdot g\,\mathrm{tg}\,\alpha$ unde $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{c}$. Deci, $F = \left(M + \frac{bcA}{2l}\right) g\,\frac{b}{c}$.

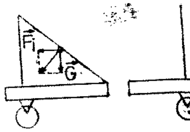

Fig. 1.266.R.

1.267. Presiunea pe fundul vasului este $\rho g h$. Forța cu care lichidul apasă asupra vasului este dată de greutatea lichidului cuprins în zona hașurată din figura 1.267.R. Porțiunea din aria bazei ocupată de lichidul ce dă forța ce acționează asupra pereților laterali ai vasului este:

$$A = \pi R^2 - \pi(R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2.$$

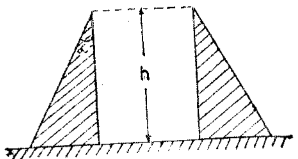

Fig. 1.267.R.

În momentul cînd lichidul a atins înălțimea h (presiunea lichidului a echilibrat greutatea vasului G și pe cea a lichidului cuprins în zona hașurată G_1)se poate scrie: $G + G_1 = \rho g h A$ unde

$$G_1 = \frac{\rho g h}{3}\{[\pi R^2 + \pi(R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2 + R(R-h)\mathrm{tg}\,\alpha)] - \rho g h \pi (R - h\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2\}.$$

Se obține: $\rho = \dfrac{G}{\pi g h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\left(R - \frac{h\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3}\right)}$.

1.268. a) Manometrul 1 indică presiunea statică, iar manometrul 2 pe cea totală (statică plus dinamică). Conform legii lui Bernoulli $p_2 = p_1 + \rho\frac{v^2}{2}$ de unde

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_2 - p_1)} = 247 \text{ m/s}.$$

b) $D_v = Sv = 61{,}75$ m³/s.

1.269. a) Din ecuația lui Bernoulli scrisă pentru marginea superioară și inferioară a pîlniei (fig. 1.269.R):

$$p_0 + \rho g h + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}$$

și constanța debitului $S_0 v_0 = Sv$ se obține că

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = 2{,}8 \text{ m/s}.$$

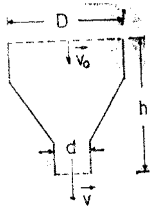

Fig. 1.269.R.

b) Debitul de volum Q_v este $Q_v = Sv = \frac{\pi d^2}{4}\cdot\sqrt{\frac{2gh}{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4}} = 4{,}45$ dm³/s.

1.270. a) Din legea lui Bernoulli (fig. 1.270.R);

$$p_0 + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g(h - x)$$

unde p_0 este presiunea atmosferică, se obține:

$v_1 = \sqrt{2gx}$. Analog, $v_2 = \sqrt{2g(x+a)}$.

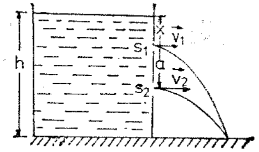

Fig. 1.270.R.

Timpii de coborîre ai unei particule de apă pînă la sol, sînt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - x)} \quad \text{și} \quad t_2 = \sqrt{\frac{2}{g}(h - x - a)}.$$

Mișcarea pe orizontală este rectilinie și uniformă și folosind faptul că $v_1 t_1 = v_2 t_2$ de unde $x = \frac{h-a}{2}$.

b) $Q_1 = s_1 v_1 = s_1\sqrt{g(h-a)}$; $Q_2 = s_2 v_2 = s_2\sqrt{g(h+a)}$.

c) Pentru ca lichidul să nu curgă, trebuie ca presiunea exercitată pe dop să fie egală cu presiunea hidrostatică a apei, adică

$$F_1 = p_1 s_1 = \rho g x s_1 = \rho g s_1\left(\frac{h-a}{2}\right) \quad \text{și} \quad F_2 = p_2 s_2 = \rho g(x+a)s_2 = \rho g s_2\left(\frac{h+a}{2}\right).$$

1.271. Ecuația lui Bernoulli se scrie:

$$p_1 + \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g h_2.$$

Conducta fiind orizontală $h_1 = h_2$, rezultă $p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ (1).

Ecuația de continuitate este: $S_1 v_1 = S_2 v_2$ (2).
Din ecuațiile (1) și (2) se obține:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]}} = 9{,}95 \text{ m/s}.$$

Debitul este $Q = S_1 v_1 = 4{,}97$ m³/s.

1.272. Viteză inițială a apei este $v = \sqrt{2gh}$, iar cea a paletei ωR. Rezultă că viteza relativă a apei față de palete este $v_r = \sqrt{2gh} - \omega R$. Masa de apă, care cade pe paletă în unitate de timp, este $m = \rho A(\sqrt{2gh} - \omega R)$. După ciocnirea cu paleta, viteza apei în raport cu aceasta este zero. Rezultă că variația impulsului masei m de apă este $\Delta p = mv$. Conform legii a doua a dinamicii

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = mv_r = \rho A\,(\sqrt{2gh} - \omega R)^2.$$

1.273. Din legea Bernoulli $\frac{\rho_{aer}\, v_A^2}{2} = \frac{\rho_{aer}\, v_B^2}{2} - \rho_{apă}\, gh$,

și constanța debitului $D = S_A v_A = S_B v_B$ rezultă

$$h = \frac{\rho_{aer}\, D^2}{2g\, \rho_{apă} S_B^2}\left(1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right) = 0{,}07 \text{ m}.$$

1.274. a) Ecuația Bernoulli se scrie:

$$\rho_p(v_2^2 - v_1^2)/2 = \rho_{Hg}\, gh \qquad (1)$$

iar constanța debitului de volum se scrie $S_1 v_1 = S_2 v_2$, de unde

$$v_1 = \left[\frac{2\rho_{Hg}\, gh}{\rho_p\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}\right]^{1/2} = 1{,}84 \text{ m/s};$$

b) $D_v = S_1 v_1 = 3{,}68 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3/\text{s}$.

1.275. Din ecuația lui Bernoulli, $p = \frac{F}{S} = \frac{\rho v_1^2}{2}$, unde $v_1 = \frac{Sv}{S_1}$ (din constanța debitului). Deci, $t = \frac{l}{v} = \frac{lS}{S_1}\sqrt{\frac{\rho S}{2F}} = 0{,}53\text{s}$.

1.276. Din ecuația lui Bernoulli,

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}, \text{ unde } v_1 = \frac{D}{S_1} \text{ și } v_2 = \frac{D}{S_2},$$

rezultă $$h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = \frac{D^2}{2g}\left(\frac{1}{S_2^2} - \frac{1}{S_1^2}\right) = 0{,}45 \text{ m}.$$

1.277. a) $D_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho D_v$ de unde rezultă $D_v = 2 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3/\text{s}$ și $v = \frac{4D_v}{\pi d^2} = 6{,}4$ cm/s.

b) $\eta_t = \eta_1 \eta_2 = 0{,}54 = 54\%$, $\eta_t = \frac{P_u}{P_c} = \frac{D_m gh}{P_c}$ de unde

$$P_c = \frac{D_m gh}{\eta_t} = 740{,}74 \text{ W}.$$

1.278. a) Viteza limită se atinge în momentul cînd $G = F_r$ unde $F_r = -kv$ deci $mg = kv$ sau $v = \frac{mg}{k} = 80$ m/s.

b) Ecuația de mișcare a parașutistului este: $m \cdot \frac{dv}{dt} = mg + F_r$ sau, proiectînd pe direcția verticală, $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$. Separăm variabilele: $\frac{dv}{mg - kv} = \frac{dt}{m}$ și după integrare $\int_0^{0,9v_l}\frac{dv}{mg - kv} = \int_0^{\tau}\frac{dt}{m}$

rezultă $-\frac{1}{k}\ln\frac{mg - 0{,}9\,v_l}{mg} = \frac{\tau}{m}$ adică $\tau = \frac{m}{k}\ln 10 = 18{,}4$ s.

1.279. a) Așa cum se vede în figura 1.279.R, pistonul parcurge distanța vt în timp ce forța F efectuează lucrul mecanic $L = Fvt$. În acest timp se scurge în exterior o masă de lichid $m = \rho A\ vt$.

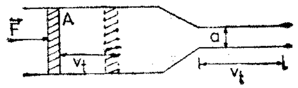

Fig. 1.279.R

Viteza de curgere a lichidului în exterior este dată de ecuația de continuitate $Av = au$. Variația energiei cinetice a moleculelor lichidului în timpul t este datorită lucrului mecanic efectuat de F. Deci:

$$Fvt = \rho\, Avt\left(\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right).$$

Înlocuind v din ecuația de continuitate se obține:

$$u = \sqrt{\frac{2F}{A\rho} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a^2}{A^2}}}.$$

Se observă că dacă $a \ll A$ atunci viteza de curgere a lichidului este: $u = \sqrt{\frac{2F}{A\rho}}$.

b) Schimbarea vitezei lichidului de la v la u se face în momentul cînd lichidul părăsește pompa. Acest lucru nu se întîmplă imediat ce forța a început să acționeze asupra pistonului, ci este nevoie de un timp în care particulele lichidului din cilindru să atingă o viteză constantă. Dacă $a \to A$ acest timp tinde la infinit și cum $F\Delta t = m\Delta v$ rezultă că deși forța F poate avea valoarea scăzută, viteza v poate tinde la infinit.

1.280. Trebuie să calculăm diferența dintre presiunea lichidului pe pereți și pe axa verticală datorită rotației vasului. Această presiune este dată de

$$p = \frac{M\omega^2 R}{2\pi RH} = \frac{\pi R^2 H\ \rho\omega^2 R}{2\ \pi RH} = \frac{\rho\omega^2 R^2}{2},$$

unde M este masa lichidului și H înălțimea acestuia.

Forța suplimentară, datorită rotației, care acționează asupra dopului este $pS + m\omega^2 R \leqslant f$, sau $\frac{\rho\omega^2 R^2}{2} S + m\omega^2 R \leqslant f$,

de unde
$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{2f}{2mR + \rho R^2 S}}.$$

1.281. a) Din ecuația lui Bernoulli : $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}$

și din constanța debitului $v_1 S_1 = v_2 S_2$; $v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2gh}{S_1^2 - S_2^2}} =$

$= 4{,}42 \cdot 10^{-2}$ m/s;

b) Scriind ecuația $\mathrm{d}h = -v_1 \mathrm{d}t = -\frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gh}\ \mathrm{d}t$, sau

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}} = -\frac{S_2^2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \cdot \mathrm{d}t,$$

rezultă prin integrare,

$$\int_h^{2h/3} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}} = -\frac{S_2}{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}} \int_0^{t_1} \mathrm{d}t,$$

adică
$$t = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2} \frac{2h}{g} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) = 8{,}25 \text{ s}.$$

c) Asemănător, $t = -\frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2} \int_h^0 \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}} = \frac{\sqrt{S_1^2 - S_2^2}}{S_2} \frac{\sqrt{2h}}{g} =$

$= 45$ s.

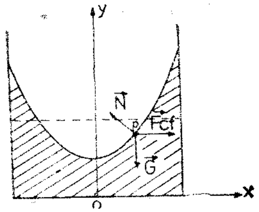

Fig. 1.282.R

1.282. Cînd lichidul se află în repaus, suprafața sa liberă este un plan orizontal. În timpul mișcării de rotație o particulă de fluid P, de masă m, de pe suprafața liberă a lichidului este în echilibru relativ sub acțiunea greutății sale mg, reacțiunii normale N și forței centrifuge F_{cf} (fig. 1.282.R), adică putem scrie condiția de echilibru sub forma :

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{cf} = 0 \quad (1).$$

Notînd cu α unghiul făcut de tangenta la suprafață în punctul P cu axa Ox, proiecția relației (1) pe direcția tangentei este :

$$mx\,\omega^2 \cos\alpha = mg \sin\alpha, \quad \text{unde } \operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

Deci, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\omega^2}{g} x$, sau $\mathrm{d}y = \frac{\omega^2}{g} x\ \mathrm{d}x$, iar după integrare:

$y = \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{g} x^2$, care este o parabolă simetrică față de axa Oy.

1.283. Conform formulei lui Toricelli viteza de curgere a lichidului este $v_0 = \sqrt{2gy}$, unde y este grosimea stratului de lichid din vasul superior. Conform ecuației de continuitate $av_0 = Av$ unde v este viteza cu care scade stratul de lichid din vasul superior, a este aria orificiului iar A este aria suprafeței lichidului din vasul superior. Considerînd că vasul are simetrie axială se poate scrie că (fig. 1.283. R.) $A = \pi x^2$, unde x este raza suprafeței lichidului. Deci, $\frac{\pi x^2}{\sqrt{2gy}} = \frac{a}{v} =$ $=$const.

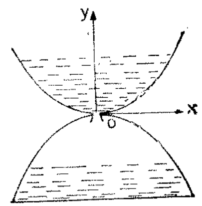

Fig. 1.283.R

Forma vasului va fi determinată de ecuația $y = kx^4$ unde $k = \frac{\pi^2 v^2}{2\ ga^2}$.

1.10. Oscilații și unde elastice

1.284. Din $E_t = \frac{kA^2}{2}$ și $F = \frac{kA}{2}$, rezultă $A = \frac{E_t}{F} = 2 \cdot 10^{-2}$ m.

1.285. Din $E_t = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 m\nu^2 A^2$;

$$m = \frac{E_t}{2\pi^2\nu^2 A^2} = 9{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

Dacă $E_c = E_p$, adică

$$\frac{1}{2} m\omega^2A^2 \cos^2(\omega t - \varphi_0) = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - \varphi_0),$$

rezultă $\quad \operatorname{tg}(\omega t - \varphi_0) = 1$, sau $4\pi t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$,

de unde $t = \frac{5}{48}$ s $= 0{,}1$ s.

1.286. Eliminînd timpul între $x = A \sin \omega t$ și $v = \omega A \cos \omega t$, adică scriind că $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$, rezultă

$$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = A^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Scriind ultima relație în cele două cazuri

$$x_1^2 + \frac{v_1^2}{\omega^2} = A^2 \quad \text{și} \quad x_2^2 + \frac{v_2^2}{\omega^2} = A^2$$

rezultă: $\quad A = \sqrt{\dfrac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}, \quad \omega = \sqrt{\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{x_2^2 - x_1^2}}$

și $\quad T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$

1.287. Înlocuind $t = 0$ în ecuațiile $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ și $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ se obține că $x_0 = A \sin \varphi$ și $v_0 = A\omega \cos \varphi$, de unde

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega x_0}{v_0}.$$

1.288. $x = A \sin(\omega t + \varphi)$, deci: $x = 0{,}05 \sin \pi t (m)$. Din relația $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{v^2}{\omega^2A^2} = 1$, se obține $v = 0{,}136$ m/s.

1.289. a) $y = A \sin(\omega t + \varphi)$.

La $t = 0$; $y = A$, deci $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $mg = k\Delta l$;

$k = \dfrac{mg}{\Delta l} = 100$ N/m, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 31{,}62$ rad/s, încît

$$y = 0{,}15 \sin\left((31{,}62\, t + \frac{\pi}{2}\right).$$

b) $E_p = \dfrac{ky_1^2}{2} = 0{,}18$ J; $\quad E_c = E_t - E_p = \dfrac{k}{2}(A^2 - y_1^2) = 0{,}94$ J.

c) $y_1 = A \sin\left(\omega t_1 + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $\quad y_2 = A \sin\left(\omega t_2 + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{\omega}\left[\arcsin\left(\frac{y_2}{A}\right) - \arcsin\left(\frac{y_1}{A}\right)\right] = 10^{-2} \text{ s}.$$

d) $L = \dfrac{k}{2}(y_2^2 - y_1^2) = 0{,}32$ J.

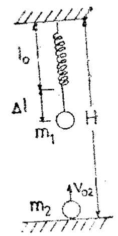

Fig. 1.290.R

1.290. a) $l = l_0 + \Delta l$ (fig. 1.290.R) unde $m_1 g = k\Delta l$. Se obține: $l = l_0 + \dfrac{m_1 g}{k} = 1{,}02$ m.

b) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} = 0{,}28$ s; $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m_1}} = 22{,}36$ rad/s.

c) $v_2 = \sqrt{v_{02}^2 - 2g(H - l)} = 4{,}05$ m/s.

Din legile conservării impulsului și energiei

$$m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'; \quad \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

rezultă $v_1' = \dfrac{2m_2v_2}{m_1 + m_2} = 2{,}7$ m/s

d) Ecuația mișcării oscilatorii este $y = A \sin(\omega t + \varphi)$. Deoarece la $t = 0$ (momentul ciocnirii), $y = 0$, se obține $\varphi = 0$. Amplitudinea mișcării se obține din conservarea energiei

$\dfrac{m_1 v_1'^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}$; încît $A = v_1'\sqrt{\dfrac{m_1}{k}} = 0{,}12$ m; Deci, $y = 0{,}12 \sin 22{,}36\, t$.

1.291. a) Ecuația mișcării oscilatorii armonice este:

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ unde } \varphi = \frac{\pi}{6} \quad \text{(din condiția inițială).}$$

Din relațiile:

$y_1 = A \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$; $\; v_1 = A\,\omega \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ și $a_1 = A\omega^2 \sin\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$ se obține prin eliminarea argumentului $\left(\omega t + \dfrac{\pi}{6}\right)$:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_1}{y_1}} = 2{,}83 \text{ rad/s}; \quad v_1 = \omega\sqrt{A^2 - y_1^2}$$

adică $$A = \frac{\sqrt{v_1^2 + \omega^2 y_1^2}}{\omega} = 0{,}35 \text{ m}.$$

Deci $y = 0{,}35\ \sin(2{,}83\ t + \pi/6)$.

b) $v_{max} = \omega A = 1$ m/s; $a_{max} = \omega^2 A = 2{,}8$ m/s².

$$F_{max} = kA = m\omega^2 A = 0{,}028 \text{ N}.$$

c) $E_c = \frac{k}{2}(A^2 - y_2^2)$; $E_p = \frac{ky_2^2}{2}$;

$$\frac{k}{2}(A^2 - y_2^2) = \frac{ky_2^2}{2}; \quad y_2 = \frac{A\sqrt{2}}{2} = 0{,}25 \text{ m}.$$

1.292. După ciocnire centrul de masă al sistemului are viteza inițială v_0 rezultată din legea conservării impulsului, $Mv/4 = 2Mv_0$, adică $v_0 = \frac{v}{8}$. Ecuația oscilației centrului de masă este $x = A\ \sin(\omega t - \varphi_0)$. Condițiile inițiale ale mișcării sînt: la $t = 0$, $x = 0$ și $v_0 = \frac{v}{8}$, adică $-A\ \sin\varphi_0 = 0$ și $A\omega\cos\varphi_0 = \frac{v}{8}$, de unde $\varphi_0 = 0$ și $A\omega = \frac{v}{8}$. Dar, $\omega = \sqrt{\frac{k}{2M}}$ și $T = 2\pi\sqrt{\frac{2M}{k}}$, iar $A = \frac{v}{8}\sqrt{\frac{2M}{k}}$.

1.293. a) În absența frecărilor mișcarea este oscilatorie armonică $y = A\sin(\omega t + \varphi)$. Din condiția inițială ($t = 0$, $y = A$) rezultă $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Corpul fiind legat de două resorturi montate în paralel are constanta elastică echivalentă $k_e = 2k$, rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{2k}{m}} = 20 \text{ rad/s}, \text{ iar } y = 8\cdot 10^{-2}\sin\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) \text{(m)}.$$

b) $v_{max} = \omega A = 1{,}6$ m/s; $a_{max} = \omega^2 A = 32$ m/s².

c) $E_p = \frac{k_e y^2}{2} = 3{,}2$ J; $E_c = E_t - E_p = k_e(A^2 - y^2)/2 = 9{,}6$ J.

d) Energia totală de deformare se transformă în lucrul mecanic al forței de frecare, adică

$$\frac{k_e A^2}{2} = \mu mgS, \text{ de unde } S = \frac{kA^2}{\mu mg} = 64 \text{ cm}.$$

1.294. a) Din $F = ky = m\omega^2 A\sin(\omega t - \varphi_0)$, $\omega = \pi$ rad/s și $A = 10^{-2}$ m.

Deci $v_{max} = \omega A = 0{,}0314$ m/s;

b) $L = \frac{kA^2}{2} = 10^{-6}$ J;

c) La momentul t_1 punctul se află în $y_1 = \frac{A}{2} = A\sin\left(\pi t_1 - \frac{\pi}{4}\right)$,

de unde $$t_1 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{12} \text{ s},$$

iar la momentul t_2 se află în $y_2 = A = A\sin\left(\pi t_2 - \frac{\pi}{4}\right)$,

de unde $t_2 = \frac{3}{4}$ s și $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{1}{3}$ s.

1.295. a) Din relația (1) a problemei (1.286) rezultă:

$$v = \pm\frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2} = \pm 8{,}2 \text{ cm/s}.$$

Semnul plus se referă la cazul cînd direcția vitezei corespunde direcției pozitive a axei x, iar semnul minus cazului cînd direcția vitezei corespunde direcției negative a axei x.

b) $F = ma$, unde $a = -\frac{4\pi^2}{T^2}mA\sin(\omega t + \varphi)$ și

$$F_{max} = \frac{4\pi^2}{T^2}mA = 1{,}49\cdot 10^{-3} \text{ N}.$$

c) $E = E_{c\,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2$, cum $v_{max} = \frac{2\pi A}{T}$

rezultă: $$E = \frac{2\pi^2}{T^2}mA^2 = 22{,}1\cdot 10^{-6} \text{ J}.$$

1.296. Mișcarea fiind fără frecare va fi periodică. Durata de timp pînă la întoarcerea în punctul de plecare este egală cu o perioadă. Timpul de coborîre pe planul de unghi $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ (fig. 1.296.R) este

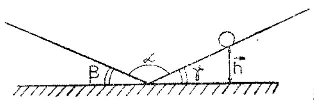

Fig. 1.296.R

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2h}{\sin(\alpha+\beta)\,g\sin(\alpha+\beta)}} = \frac{1}{\sin(\alpha+\beta)}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

La baza planului sfera are viteza $v = \sqrt{2gh}$ și timpul de urcare pe al doilea plan este

$$t_2 = \frac{v}{a_2} = \frac{\sqrt{2gh}}{g\sin\beta} = \frac{1}{\sin\beta}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Perioada mişcării este egală cu

$$T = 2(t_1 + t_2) = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{\sin\beta + \sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)}.$$

Frecvenţa mişcării este:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{2h}}\cdot\frac{\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)} = 0{,}875 \text{ Hz}.$$

1.297. a) $G = k\,\Delta l = mg$ deci $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 0{,}4\text{s}$;

b) La $t = 0$ avem $x_0 = \Delta l = 0{,}04\text{m}$; şi $v_0 = \sqrt{2gl} = 2{,}8$ m/s.

Din relaţia $\frac{x_0^2}{\omega^2} + \frac{v_0^2}{\omega^2 A^2} = 1$ (vezi problema 1.286),

unde $\omega = 2\pi/T = 5\pi$ rad/s, rezultă $A = 0{,}178$ m.

Dar, la $t = 0$, $x_0 = A\sin\varphi$, deci

$$\varphi = \text{arc sin}\frac{\Delta l}{A} = \text{arc sin } 0{,}22 \simeq 0{,}226 \text{ rad}.$$

Rezultă $x = 0{,}178\sin(5\pi t - 0{,}226)$ (m)

c) $F = -kx$, unde $k = G/\Delta l = 50$ N/m,

adică $F = -8{,}9\sin(5\pi t - 0{,}226)$ (N).

1.298. În poziţia de echilibru; $mg = kl$. În prima etapă vom considera $M = 0$. Dacă faţă de poziţia de echilibru corpul m este deplasat cu x_0, el va oscila astfel încît dacă se notează cu x deplasarea la un moment oarecare legea conservării energiei se scrie:

$$\frac{k(x_0+l)^2}{2} - mg\,x_0 = \frac{mv^2}{2} + \frac{k(x+l)^2}{2} - mgx.$$

Înlocuind $mg = kl$ se obţine $v = \sqrt{\frac{k(x_0^2 - x^2)}{m}}$.

Dacă se ţine seama că $M \neq 0$ atunci legea de conservare a energiei se scrie:

$$\frac{k(x_0+l)^2}{2} - mgx_0 = \frac{(m+M)v^2}{2} + \frac{k(x+l)^2}{2} - mg\,x.$$

Se obţine că: $v = \sqrt{\frac{k(x_0^2-x^2)}{M+m}}$.

Se observă că în cel de-al doilea caz corpul oscilează ca şi cum masa sa ar fi mai mare cu M. Deoarece pentru cazul cînd $M = 0$ perioada este:

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$

rezultă că în cazul cînd $M \neq 0$ vom avea că $T = 2\pi\sqrt{(m+M)/k}$.

1.299. Forţa ce acţionează asupra bilei în cazul cînd firul este întins este: $F = 2f\sin\varphi$(fig. 1.299.R). Unghiul φ fiind mic (mici oscilaţii)

$\text{tg}\,\varphi = 2x/l \simeq \sin\varphi$, deci $F = 4fx/l$.

Dar $F = kx$ şi rezultă $k = 4f/l$. Întrucît $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ după înlocuirea lui k se obţine

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{4f}}.$$

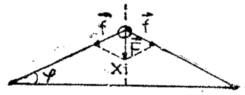

Fig. 1.299.R.

1.300. a) Scriem legea de conservare a energiei:

$$(ml^2 + Mr^2)\frac{\omega^2}{2} = Mgr\,\alpha - mgl(1-\cos\alpha),$$

de unde rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{2\left(Mgr\alpha - 2mgl\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{ml^2 + Mr^2}}.$$

Mişcarea oscilatorie se produce dacă pentru un anumit unghi α, viteza unghiulară ω se anulează (în continuare corpul m va reveni spre poziţia verticală) adică dacă:

$$Mr\alpha = 2ml\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Notînd cu $k = \frac{Mr}{ml}$ se obţine $\frac{k\alpha}{2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Această ecuaţie se rezolvă prin metoda grafică. Pentru aceasta se reprezintă grafic curba

$$y = \sin^2\frac{\alpha}{2} \text{ şi dreapta } y = \frac{k\alpha}{2}$$

(fig. 1.300. R).

Intersecţia acestor curbe dă punctul A care are abscisa α corespunzătoare unui k dat. Ecuaţia transcendentă are o soluţie diferită de zero dacă k este mai mic decît un k_0 care corespunde cazului cînd

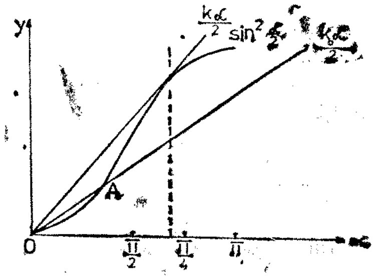

Fig. 1.300.R.

dreapta $y = \frac{k_0 \alpha}{2}$ este tangentă curbei $y = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ în punctul O (căruia îi corespunde $\alpha \simeq 133°$).
Se obține pentru k_0 valoarea 0,73. Așadar, oscilațiile sînt posibile dacă $k_0 = 0{,}73 \geqslant \frac{Mr}{m}$.

b) Dacă $\alpha = 90°$ rezultă $k = \frac{2}{\pi}$, deci $\frac{Mr}{ml} = \frac{2}{\pi}$ de unde $k = \frac{Mr \cdot \pi}{2m}$. Se obține : $l = 0{,}628$ m.

1.301. a) Din condiția, $kA = mg$ rezultă $k = \frac{mg}{A}$. Perioada oscilației celor două corpuri este

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{2A}{g}}.$$

b) Din legea conservării impulsului, viteza inițială este $mv = 2mv_0$, unde $v = \sqrt{2gA}$, deci $v_0 = \sqrt{\frac{gA}{2}}$.
Ecuația mișcării oscilatorii, $y = A_1 \sin(\omega t - \varphi_0)$ verifică condițiile inițiale : la $t = 0$, $y = y_0 = -A$ și $v = v_0 = \sqrt{\frac{gA}{2}}$, adică

$$y_0 = -A_1 \sin \varphi_0 = -A \text{ și } v_0 = \omega A_1 \cos \varphi_0 = \sqrt{\frac{gA}{2}},$$

de unde

$$\sin \varphi_0 = \frac{A}{A_1} \text{ și } \cos \varphi_0 = \frac{1}{\omega A_1} \sqrt{\frac{gA}{2}} = \frac{A}{A_1}.$$

Din identitatea trigonometrică

$$\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1 \text{ rezultă } A_1 = A\sqrt{2}.$$

c) Înălțimea maximă va fi $h = A_1 - A = A(\sqrt{2} - 1)$.

1.302. $x = 6 \sin 2t + 2\sqrt{3} \cos 2t = A \sin(2t + \varphi)$, sau $6 \sin 2t + 2\sqrt{3} \cos 2t = A \sin 2t \cos \varphi + A \sin \varphi \cos 2t$.

După identificare, $A \cos \varphi = 6$ și $A \sin \varphi = 2\sqrt{3}$, de unde $A = \sqrt{36 + 12} = 4\sqrt{3}$ cm și $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{\sqrt{3}}$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Viteza maximă este egală cu

$$v_{max} = \omega A = 8\sqrt{3} \text{ cm/s}.$$

1.303. a) Se elimină timpul și se obține ecuația traiectoriei

$$y = b\left(2 \frac{x^2}{a^2} - 1\right),$$

care reprezintă ecuația unei parabole.

b) Viteza, tangentă în orice punct la traiectorie, are două componente :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -a\omega \sin \omega t, \quad v_y = \frac{dv}{dt} = -2b\,\omega \sin 2\,\omega t \text{ iar}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 \omega t + 4\,b^2 \sin^2 2\omega t}.$$

c) Analog, pentru accelerația :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4b\,\omega^2 \cos 2\,\omega t.$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \omega^2 \sqrt{a^2 \cos^2 \omega t + 16\,b^2 \cos^2 \omega t}.$$

1.304. Scriind că

$$x = A \sin(\omega t - \varphi_0) = A \sin \omega t \cos \varphi_0 - A \cos \omega t \cdot \sin \varphi_0,$$

după identificare rezultă că $A \cos \varphi_0 = 3$, $A \sin \varphi_0 = 4$, $\omega = 2\pi$, de unde $A = 5$cm, $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4}{3}$ și $\varphi_0 = 0{,}927$ rad, iar $T = \frac{2\pi}{\omega} = 1$s. Deci,

$$x = 5 \sin(2\pi t - 0{,}927) \text{ (cm)},$$

viteza $v = \frac{dx}{dt} = 10\,\pi \cos(2\pi t - 0{,}925)$cm/s și accelerația,

$$a = \frac{dv}{dt} = -20\pi^2 \sin(2\pi t - 0{,}925) = -4\pi^2 x \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

1.305. Cu ajutorul formulelor trigonometrice,

$$x = 1 - \cos(6\pi t + \pi) = 1 + \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

sau

$$x - 1 = \sin\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mişcarea este armonică cu amplitudinea $A = 1$ cm, perioada $T = \frac{2\pi}{\omega} = \left(\frac{1}{3}\right)$ s, faza iniţială $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, viteza $v = \frac{dx}{dt} = 6\pi \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$. Mişcarea are loc în jurul poziţiei de echilibru cu abscisa $x_1 = 1$ cm.

1.306. Scriind, $x = 2 \sin 2\pi t \cos \pi + 2 \cos 2\pi t \sin \pi = -2 \sin 2\pi t$ şi $y = 2 \sin 2\pi t \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cos 2\pi t \sin \frac{\pi}{2} = 2\cos 2\pi t$, şi înlocuind în relaţia $\sin^2 2\pi t + \cos^2 2\pi t = 1$, rezultă ecuaţia cercului $x^2 + y^2 = 4$, cu raza $R = 2$cm.

1.307. a) Viteza ansamblului scripete-cilindru înainte de ruperea inelului se obţine din legea conservării impulsului. Notînd cu v această viteză avem:

$$v = \frac{G_c}{G + G_c} v_0 = 5\text{m/s}$$

unde $v_0 = \sqrt{2gh}$ este viteza corpului în momentul ciocnirii.

Căldura eliberată în ciocnire va fi:

$$Q = \frac{G_c}{g} v_0^2 - \frac{(G_c + G)}{g} v^2 = 51 \text{ J}.$$

b) Energia W cheltuită pentru ruperea inelului de gardă se obţine din legea conservării energiei:

$$W = \frac{G_c + G}{g} v^2 - \frac{G_c + G}{g} v_f^2 = 18{,}4 \text{ J}.$$

c) Dacă scripetele mobil se află la o distanţă x faţă de poziţia de echilibru atunci forţa ce acţionează asupra sa va fi

$$F = G_t - (k_1 + 4k_2)x \quad (1),$$

unde $G_t = G_c + G$.

În noua poziţie de echilibru avem:

$$G_t - (k_1 + 4k_2)x_e = 0 \quad (2).$$

Scăzînd (2) din (1) rezultă: $F = (k_1 + 4k_2)(x_e - x)$, de unde se vede că mişcarea scripetelui mobil are loc sub acţiunea unei forţe elastice de constantă: $k' = k_1 + 4k_2$.

Perioada va fi deci: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 0{,}26$ s.

d) $x_e = \frac{G_t}{k'} = 1{,}67$ cm.

Din relaţia $\frac{v_f^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x_e^2}{A^2} = 1$, unde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, se obţine amplitudinea mişcării oscilatorii a scripetelui mobil $A = 16{,}58$ cm.

Rezultă: $x_{max} = x_e + A = 18{,}25$ cm

şi $x'_{max} = A - x_e = 14{,}91$ cm.

f) $v_{max} = \omega A = 4$ ms^{-1}.

1.308. $c = \lambda\nu = 343$ m/s şi $v_{max} = \omega A = 2\pi\nu A = 0{,}646$ m/s.

1.309. Considerînd că barca este o sursă de unde în fiecare punct al traiectoriei sale, undele produse în punctul C vor ajunge primele pe mal. Acest lucru se întîmplă dacă

$$u = v \sin \alpha \quad (1).$$

Din (1), $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ şi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad.

Timpul total de la începutul mişcării bărcii pînă cînd undele ajung la mal este:

$$t = \frac{AC}{v} + \frac{R - r\cos\alpha}{u} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)R}{2v} + \frac{R(2 - \cos\alpha)}{2u} \quad (2),$$

de unde $R = \dfrac{2uvt}{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)u + v(2 - \cos\alpha)} = 543$ m.

Observaţie. Condiţia (1) reprezintă condiţia de maxim a funcţiei $t(\alpha)$, adică este rădăcina ecuaţiei $\frac{dt}{d\alpha} = 0$.

1.310. a) Viteza centrului de masă este $\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$.

Din legea conservării impulsului se obţine

$$v_{CM} = 0, \quad (1)$$

unde s-a ţinut seama că impulsul iniţial al sistemului este nul. Deci deplasarea centrului de masă este nulă.

b) Fie l lungimea resortului nedeformat, iar l_1 şi l_2 distanţele dintre centrul de masă şi cele două corpuri. Atunci,

$$m_1 l_1 = m_2 l_2 \tag{2}$$

şi

$$l_1 + l_2 = l. \tag{3}$$

Dacă x_1 şi respectiv x_2 sînt deplasările corpurilor cînd resortul este deformat, se poate scrie:

$$m_1(l_1 - x_1) = m_2(l_2 - x_2) \tag{4}$$

de unde
$$m_1 x_1 = m_2 x_2. \tag{5}$$

Atunci, deplasarea totală a celor două corpuri va fi:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_2}. \tag{6}$$

Forţa cu care resortul acţionează asupra fiecărui corp va fi:

$$F = k(x_1 + x_2) = kx_1 \frac{m_1 + m_2}{m_2} = k_1 x_1. \tag{7}$$

Deci perioada de oscilaţie a corpurilor este:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}. \tag{8}$$

c) $v_{max} = a\omega = a\sqrt{\dfrac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$.

d) În condiţiile fixării corpului m_1, impulsul sistemului nu se mai conservă. Dacă notăm cu x deplasarea corpului de masă m_2 faţă de poziţia nedeformată a resortului atunci energia potenţială a resortului se transformă în energie cinetică a corpului. În momentul trecerii prin poziţia de echilibru viteza sa va fi:

$$v_2 = x\sqrt{\frac{k}{m_2}}, \text{ iar impulsul } m_2 v_2 = x\sqrt{km_2}.$$

Viteza centrului de masă va fi: $v_{CM} = \dfrac{m_2 v_2}{m_1 + m_2}$.

1.311. a) Din $E_t = \dfrac{m\omega^2 A^2}{2}$ rezultă

$$\omega = \sqrt{\frac{2E_t}{mA^2}} = 15{,}7 \simeq 5\pi \text{ rad/s}$$

iar din

$$y = A\sin(\omega t - \varphi_0), \ \sin(\omega t - \varphi_0) = \frac{1}{2} \text{ şi}$$

$$\omega t - \varphi_0 = \frac{\pi}{6}, \quad \text{deci}$$

$$\varphi_0 = \omega t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \text{ rad.}$$

Atunci,

$$y = 2\sin\left(5\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (mm).}$$

b) $\varphi = \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi x}{\lambda}$, de unde $\lambda = 120$ m.

c) $E = c^2\rho = \lambda^2\nu^2\rho = 11{,}7 \cdot 10^4$ N/m^2.

1.312. a) $10\pi = \dfrac{2\pi x_1}{\lambda}$ şi $9\pi = \dfrac{2\pi x_2}{\lambda}$, de unde $x_1 - x_2 = \dfrac{\lambda}{2}$, deci apare un minim.

b) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = A_1 + A_2 = 3$ mm;

c) $\lambda = \dfrac{c}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 0{,}02$ m.

1.313. a) $v_{max} = \omega A = 15{,}7$ m/s;

b) $c = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 5000$ m/s.

c) $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi x_1}{\lambda}$ şi $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{2\pi x_2}{\lambda}$, de unde

$$l = x_1 + x_2 = \frac{\lambda}{2}, \text{ unde } \lambda = \frac{c}{\nu} = 20 \text{ m.}$$

Deci, $l = 10$ m.

1.314. a) $t = \dfrac{x}{c}$, unde $c = \dfrac{\lambda\omega}{2\pi} = 500$ m/s. Deci $t = 0{,}016$ s.

b) $\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi x}{\lambda}$, de unde $x = \dfrac{\lambda}{12} = 0{,}83$ m;

c) $\varphi = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot\dfrac{\lambda}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$ rad.

1.315. a) Ecuaţia mişcării oscilatorii este

$$y = A\sin(\omega t + \varphi) \text{ unde } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ k = \frac{F}{d} \text{ şi } A = d.$$

Avem $\omega = \sqrt{\dfrac{F}{md}} = 2\cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}}$.

La $t = 0$, $y = d\sin(-\varphi)$ deci

$$\varphi = \frac{3\pi}{2};\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 3{,}14\cdot 10^{-3}\ \mathrm{s},\quad \nu = \frac{1}{T} = 0{,}3\cdot 10^3\ \mathrm{s^{-1}}.$$

b) $y = d\sin(\omega t - \varphi)$, deci, $y = 0{,}17\sin\left(2\cdot 10^3 t - \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

c) $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2A^2 = 5{,}78\cdot 10^4$ J.

d) distanţa dintre un ventru şi un nod este $\dfrac{\lambda}{4}$. Viteza de propagare a undei este

$$c = \frac{D}{t} = 331 \text{ m/s}.$$

Lungimea de undă este $\lambda = cT = 1{,}04$ m. Dacă numărul nodurilor formate este k atunci numărul ventrelor este $(k-1)$. Deci $(2k-1)\dfrac{\lambda}{4} = D$. Rezultă

$$k = \frac{4D}{2\lambda} + \frac{1}{2} = 32.$$

1.316. a) Identificînd mărimile din ecuaţia $y = A\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda}\right)$ rezultă $\nu = 500$ Hz şi $\lambda = 10$ m.

b) Viteza undei longitudinale este $c = \lambda\nu = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, de unde $\rho = \dfrac{E}{\lambda^2\nu^2} = 2{,}7\cdot 10^3$ kg/m³.

c) $\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{2\pi x_1}{\lambda}$, de unde $x_1 = 1$ m.

1.317. a) Ecuaţia undei este:

$y = A\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}x\right)$ şi prin identificare, avem $A = 0{,}6$ mm;

$\omega = 1800$ rad/s; $\dfrac{2\pi}{\lambda} = 5{,}3$ încît $\dfrac{\lambda}{A} = 1975{,}8$.

b) Viteza de oscilaţie a punctelor materiale

$$u = \frac{dy}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right);\quad u_{max} = A\omega,$$

iar viteza de propagare a undei, va fi

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi\lambda}{\omega},\ \text{încît}\ \frac{u_{max}}{v} = \frac{A\omega^2}{2\pi\lambda} = 2611.$$

c) Deformaţia relativă a mediului este:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2\pi}{\lambda}A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right);\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{max} = \frac{2\pi}{\lambda}A$$

iar $u_{max} = \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{max} = A\omega$, încît se obţine: $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{max} = v\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{max}$.

1.318. a) Ecuaţia undei este:

$$y = A\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right),\ \text{unde}$$

$\lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{1}{\nu}\sqrt{\dfrac{E}{\rho}} = 8$ m, deci $y = 0{,}025\sin 2\pi\left(500\,t - \dfrac{x}{8}\right)$ m.

b) Ecuaţia undei în cele două puncte x_1 şi x_2 este

$$y_1(x_1, t) = A\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x_1}{\lambda}\right);$$

$$y_2(x_2, t) = A\sin 2\pi\left(\nu t - \frac{x_2}{\lambda}\right),\ \text{iar}$$

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\nu t - \frac{x_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\nu t - \frac{x^2}{\lambda}\right) = 2\pi\frac{x_2 - x_1}{\lambda} = 50\,\pi.$$

c) Ecuația undei în același punct x, la două momente diferite, este

$$y_1(x, t) = A \sin 2\pi\left(\nu t_1 - \frac{x}{\lambda}\right), \quad y_2(x, t) = A \sin 2\pi\left(\nu t_2 - \frac{x}{\lambda}\right) \text{ încît}$$

$$\Delta\varphi' = 2\pi\left(\nu t_2 - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\nu t_1 - \frac{x}{\lambda}\right) = 2\pi\nu(t_2 - t_1) = 5000\,\pi.$$

d) Se suprapun undele:

$$y_1(x, t) = 0{,}025 \sin\left[2\pi\left(500\,t - \frac{x}{8}\right)\right] \text{ și}$$

$$y_2(x, t) = 0{,}025 \sin\left[2\pi\left(500\,t - \frac{x}{8}\right) \pm \frac{\pi}{3}\right], \text{ încît}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2 \cdot 0{,}025 \sin\left[2\pi\left(500\,t - \frac{x}{8}\right) \pm \frac{\pi}{6}\right] \cdot \cos\frac{\pi}{6} =$$

$$= 2 \cdot 0{,}025 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left[2\pi\left(500\,t - \frac{x}{8}\right) \pm \frac{\pi}{6}\right] =$$

$$= 0{,}025 \cdot \sqrt{3} \sin\left[2\pi\left(500\,t - \frac{x}{8}\right) \pm \pi/6\right].$$

1.319. a) Fazele undelor fiind $\varphi_1 = \omega_1 t - k_1 x_1$ și respectiv $\varphi_2 = \omega_2 t - k_2 x_2$ la distanța d_1 se produce o concordanță de fază dacă

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\omega_1 t - k_1 d_1) - (\omega_2 t - k_2 d_2) = 0. \qquad (1)$$

Concordanța imediat următoare se produce la același moment în punctul de abscisă d_2, pentru

$$(\omega_1 t - k_1 d_2) - (\omega_2 t - k_2 d_2) = 2\pi. \qquad (2)$$

Scăzînd relațiile (1) și (2), găsim:

$$d = d_2 - d_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

b) Punctul în care fazele coincid la momentul t' va avea abscisa d', adică

$$(\omega_1 t' - k_1 d_1') - (\omega_2 t' - k_2 d_1') = 0. \qquad (3)$$

Scăzînd relațiile (2) și (3), se obține viteza de deplasare a punctului de coincidență a fazelor

$$u = \frac{d_1' - d_1}{t' - t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} = \frac{v_1\lambda_2 - v_2\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

1.320. a) Dacă capătul M oscilează după legea $y_M = A \sin \omega t$, atunci în punctul P se suprapun unda directă și unda inversă

$$y_d = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l - x}{\lambda}\right), \quad y_i = A \sin\left[2\pi\left(\nu t - \frac{l + x}{\lambda}\right) + \pi\right].$$

La unda inversă se adaugă termenul π, deoarece reflexia pe un obstacol rigid produce o schimbare a fazei cu π. Deci,

$$y_P = y_d + y_i = 2A \sin\left[2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right] \cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= 2A \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right) = A_r \cos 2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right)$$

unde

$$A_r = 2A \sin\frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{cu } \lambda = vT = \frac{v}{\nu} = 1 \text{ m}.$$

Numeric $A_r = 2A \sin\frac{5\pi}{2} = 2A = 20$ cm, încît

$$y = 0{,}2 \cos 2\pi(450\,t - 10) \text{ m}.$$

b) Se vor obține ventre în punctele în care A_r este maximă adică atunci cînd

$$\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1; \quad \frac{2\pi x_v}{\lambda} = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{sau}$$

$$x_v = (2n + 1)\frac{\lambda}{4}; \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

În cazul particular dat $\lambda = 1$ m, încît

$$x_v = \frac{2n + 1}{4} = \frac{1}{4};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{4};\ \frac{7}{4};\ \ldots \text{ (m)}.$$

Se obțin noduri dacă $\sin\frac{2\pi x}{\lambda} = 0$; $\frac{2\pi x}{\lambda} = 2n \cdot \frac{\lambda}{2}$;

$$x_n = \frac{2n\lambda}{4} = \frac{n}{2}; \quad x_n = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \ldots \text{ (m)}.$$

1.321. a) Ecuațiile celor două unde în punctul de întîlnire sînt

$$y_1 = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l_1}{\lambda}\right); \; y_2 = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l_2}{\lambda}\right) \text{ iar}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l_1 + l_2}{2\lambda}\right) \cos 2\pi \frac{l_2 - l_1}{2\pi} =$$

$$= 2A \cos\frac{\pi}{6} \sin 2\pi\left(100\, t - \frac{1}{8}\right) = \sqrt{3}\cdot \sin 2\pi\left(100\, t - \frac{1}{8}\right) \text{cm}.$$

b) În punctul N se produce un proces de interferență. Ecuațiile undelor în punctul N sînt:

$$y_1 = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{d + l}{\lambda}\right);$$

$$y_2 = A \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{l}{\lambda}\right), \text{ iar}$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A \cos\frac{\pi d}{\lambda} \sin 2\pi\left(\nu t - \frac{d + 2l}{\lambda}\right) =$$

$$= 2A \cos\frac{\pi}{4} \sin 2\pi\left(100\, t - \frac{9}{4}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cdot \sin 2\pi\left(100\, t - \frac{9}{4}\right) \text{cm}.$$

c) $v = \lambda\nu = 120$ m/s.

1.322. a) Tubul fiind închis la un capăt reflexia se produce cu un salt de fază egal cu π. Ecuațiile undei incidente și reflectate la distanța x de capătul deschis (fig. 1.322.R) sînt:

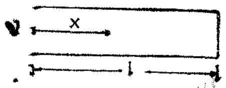

Fig. 1.322.R.

$$y_i = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right); \; y_r = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) + \pi\right].$$

Diferența de fază va fi:

$$\Delta\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{2l - x}{\lambda}\right) + \pi - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = \frac{4\pi}{\lambda}(x - l) + \pi.$$

b) Unda rezultantă va fi:

$$y = y_i + y_r = 2A \cos\left[2\pi\left(\frac{l - x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda}\right) + \frac{\pi}{2}\right].$$

Ventrele se obțin pentru $2\pi\left(\frac{l - x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2} = k\pi$, adică $x_v = l - \lambda\left(k + \frac{1}{2}\right)$, unde $k = 0,1,2, \ldots$ Nodurile se obțin pentru

$$2\pi\left(\frac{l - x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ adică}$$

$$x_n = l - \lambda\left(\frac{k}{2} - 1\right), \text{ unde } k = 0,1,2, \ldots$$

1.323. a) Ecuațiile undelor în punctul de întîlnire sînt:

$$y_1 = 2 \sin 100\,\pi\left(t - \frac{d_1}{v}\right); \; y_2 = 4 \sin\left[100\,\pi\left(t - \frac{d_2}{v}\right) + \frac{\pi}{3}\right].$$

Diferența dintre fazele undelor este

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 100\,\pi\left(t - \frac{d_1}{v}\right) - 100\,\pi\left(t - \frac{d_2}{v}\right) - \frac{\pi}{3} =$$

$$= 100\,\pi\frac{\Delta d}{340} - \frac{\pi}{3}.$$

b) $\Delta\varphi = 0$ cînd $\Delta d = 1{,}13$ m.

c) $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi} = 6$ cm

deoarece $\cos\Delta\varphi = \cos 2\pi = 1$.

1.324. a) Legătura dintre diferența de fază $\Delta\varphi$ și diferența de drum Δd este

$$\Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta d}{\lambda} = \frac{2\,\pi\nu\Delta d}{v} = \frac{\omega\Delta d}{v} = 5\pi, \text{ iar}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\Delta\varphi} = 2 \text{ cm}.$$

b) Se obține A_{max} cînd $\cos \Delta\varphi = 1$;

$$\Delta\varphi = 2\,k\pi = \frac{2\pi\,\Delta d}{\lambda},\ \text{deci}\ \Delta d = 2k\frac{\lambda}{2}\ \text{(număr par de } \lambda/2).$$

Se obține A_{min} cînd $\cos\Delta\varphi = -1$, deci $\Delta\varphi = (2k+1)\pi = \frac{2\pi\,\Delta d}{\lambda}$, încît $\Delta d = (2k+1)\lambda/2$.

c) $\Delta\varphi = \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi x}{\lambda}$, de unde $x = \frac{1}{3}$ m.

1.325. Tubul corespunde unui număr întreg de semilungimi de undă, adică $n\cdot\frac{\lambda}{2} = l$, $(n = 1,2,\ldots)$.

Frecvențele oscilațiilor naturale sînt:

$$\nu_n = \frac{c}{\lambda_n} = \frac{nc}{2l} = 50n\,\mathrm{s}^{-1}.$$

1.326. a) Ecuațiile undelor generate de sursele din S_1 și S_2 în punctul M sînt:

$$y_1(t, r_1) = A\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{r_1}{\lambda}\right);\quad y_2(t, r_2) = A\sin\left(\omega t - 2\pi\frac{r_2}{\lambda} - \varphi_0\right).$$

Prin compunerea celor două oscilații se obține:

$$y(t) = A\cos\left[\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right]\cdot\sin(\omega t - \varphi)$$

unde faza φ este dată de relația:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\left(2\pi\frac{r_2}{\lambda} + \varphi_0\right) + \sin 2\pi\frac{r_1}{\lambda}}{\cos\left(2\pi\frac{r_2}{\lambda} + \varphi_0\right) + \cos 2\pi\frac{r_1}{\lambda}} =$$

$$= \operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(r_1 + r_2)\right].$$

b) Există noduri în punctele unde elongația $y(t)$ este nulă. Deci

$$\cos\left[\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right] = 0.$$

Ținînd seama că $r_1 + r_2 = l$ mai putem scrie:

$$\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(l - 2r_1) = (2k_1 + 1)\frac{\pi}{2},$$

de unde se obțin pozițiile nodurilor:

$$r_1 = \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\varphi_0}{2\pi} - k_1 - \frac{1}{2}\right).$$

Întrucît se obțin ventre în punctele de amplitudine maximă avem:

$$\left|\cos\left[\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(l - 2r_1)\right]\right| = 1\ \text{de unde}$$

$$\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(l - 2r_1) = k_2\ \text{deci}\ r_1 = \frac{l}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\varphi_0}{2\pi} - k_2\right).$$

c) Pentru un punct P situat pe mediatoarea segmentului S_1S_2 la distanța d de mijlocul O al segmentului (fig. 1.326. R) avem:

$$r_1 + r_2 = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}.$$

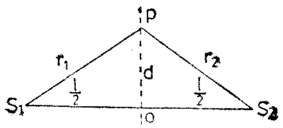

Fig. 1.326.R.

Punctele O și P oscilează în fază dacă

$$\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{\pi}{\lambda}l + 2k\pi.$$

Înlocuind $r_1 + r_2$ se obține $d = \pm\sqrt{k\lambda l + k^2\lambda^2}$.

1.327. a) Întrucît firul formează un *fus* rezultă că $2l = \lambda$. Relația dintre frecvență și lungimea de undă este $\lambda = \frac{v}{\nu}$, unde v este viteza de propagare a undelor longitudinale. Deoarece $v = \sqrt{\frac{Tl}{m}}$, unde $T = m_1 g$, rezultă:

$$\nu = \frac{\sqrt{\frac{Tl}{m}}}{2l} = 24{,}5\ \text{Hz}.$$

b) În cazul formării a două fuse $\lambda = l$, deci

$$T = 4l\nu^2 m = 0{,}49\ \text{N}.$$

1.328. a) Distanța dintre două creste vecine este lungimea de undă: $\lambda = 8\text{mm}$; $v = \lambda\nu = 8 \cdot 10^2 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$.

b) Energia emisă de sursă se repartizează pe circumferințe cu raze mai mari. Cum energia este proporțională cu pătratul amplitudinii avem:

$$W_1 = ka_1^2, \quad W_2 = ka_2^2$$

unde a_1 și a_2 reprezintă amplitudinile a două unde aflate la distanțele r_1 și r_2 de sursă. Deoarece energia ce se transmite este aceeași se poate scrie:

$\frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{r_2}{r_1}$, deci amplitudinea unui punct aflat la 12,5 cm de sursă este: $a_1 = a_2 \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = 1$ mm.

Elongația acestui punct la momentul t va fi:

$$y = \sin 2\pi\left(\frac{t}{10^{-2}} - \frac{125}{8}\right) \text{mm, deci}$$

$$y_1 = 0{,}7 \text{ mm}, \quad y_2 = 0{,}7 \text{ mm}.$$

c) Energia de vibrație a bucății de plută este: $W = 2\pi^2 mA^2\nu^2$, unde amplitudinea $A = a_2\sqrt{\frac{r_2}{R}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ mm. Deci $W = 6{,}25 \cdot 10^{-6}$ J.

1.329. Deoarece distanța dintre un ventru și un nod este $\lambda/4$, conform figurii 1.329.R, lungimea corzii va fi:

$$l = 11\frac{\lambda}{4}; \quad \lambda = \frac{4l}{11} \quad (1). \text{ Dar}$$

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{Tl}{m}} \quad (2).$$

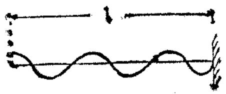

Fig. 1.329.R.

Din egalarea relațiilor (1) și (2) se obține:

$$\frac{4l}{11} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{Tl}{m}}, \text{ unde } m = \rho V = \rho Sl = \rho\frac{\pi d^2 l}{4},$$

încît

$$\frac{4l}{11} = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{Tl}{\rho\frac{\pi d^2 l}{4}}} \text{ și } T = \frac{4l^2}{121} \cdot \pi d^2 \rho \nu^2 = 8{,}8 \text{ N}.$$

1.330. Vergeaua fiind liberă la capete și prinsă la mijloc,

$$L = \frac{\lambda}{2} = \frac{vT}{2}.$$

Asemănător,

$$l = \frac{\lambda_a}{2} = \frac{v_a T}{2}.$$

Perioada T este aceeași în orice mediu.
Astfel,

$$v = v_a \frac{L}{l} = 5700 \text{ m/s}.$$

Capitolul 2

FENOMENE TERMICE

ENUNȚURI

2.1. Legile gazelor ideale

2.1. Un barometru cu mercur, avînd gaz în tubul barometric, aflat într-un ascensor mobil, indică presiunea $p_1 = 0,5 \cdot 10^5$ N/m² la temperatura $T_1 = 300$ K. Cu ce accelerație trebuie să urce liftul pentru ca barometrul să indice aceeași presiune la temperatura $T_2 = 280$ K? Presiunea atmosferică în cabină rămîne aceeași $p_0 = 10^5$ N/m².

2.2. Un gaz suferă o transformare izobară în care i se ridică temperatura cu ΔT. Să se calculeze: a) temperatura inițială T_1 a gazului pentru care volumul acestuia se mărește cu $1/n$ din valoarea inițială; b) temperatura inițială T'_1, pentru care volumul gazului se mărește de n ori.

2.3. Într-un tub cilindric orizontal, deschis la ambele capete se află două pistoane ușoare, cu secțiunea $S = 10$ cm², legate printr-un fir, care se pot mișca fără frecare. Presiunea și temperatura aerului, în volumul dintre cele două pistoane și în exterior, sînt $p_0 = 10^5$ N/m² și $t = 27$°C. Pînă la ce temperatură t_1 poate fi încălzit aerul, delimitat de cele două pistoane, astfel ca firul ce leagă pistoanele să nu se rupă? Tensiunea maximă suportată de fir este $F = 30$ N.

2.4. Într-un cilindru cu piston se află aer la presiunea $p_1 = 2 \cdot 10^5$ N/m² și temperatura $T_1 = 300$ K. Să se afle masa m ce trebuie așezată deasupra pistonului, cînd gazul din cilindru a fost încălzit pînă la $T_2 = 400$ K, pentru ca volumul gazului să rămînă constant. Secțiunea pistonului este $S = 30$ cm².

2.5. Într-un recipient cu volumul $V_1 = 40$ dm³ se găsește oxigen la $p_1 = 1,5 \cdot 10^7$ N/m² și $t_1 = 27$°C. Să se calculeze: a) masa oxigenului din recipient; b) densitatea gazului în condițiile date (ρ_1) și în condiții normale (ρ_0); c) temperatura maximă la care se poate încălzi recipientul dacă rezistă la presiunea $p_2 = 2 \cdot 10^7$ N/m² ($\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol).

2.6. Un balon de sticlă a fost cîntărit succesiv la aceeași temperatură, în următoarele condiții: a) vidat, găsindu-se masa $m_1 = 200$ g; b) umplut cu aer la presiunea atmosferică normală, găsindu-se $m_2 = 204$ g; c) umplut cu un gaz la presiunea $p = 1,5 \cdot 10^5$ N/m², găsindu-se $m_3 = 210$ g. Se cere masa molară μ_g a gazului necunoscut ($\mu_{aer} = 29$ g/mol).

2.7. Să se calculeze volumul V_0 ocupat la presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m² de aerul evacuat dintr-un recipient cu volumul $V = 10$ l, dacă presiunea din recipient scade de la $p_1 = 1,5 \cdot 10^6$ N/m² la $p_2 = 1,5 \cdot 10^5$ N/m², iar temperatura T rămîne constantă.

2.8. Un cilindru închis la ambele capete și prevăzut cu un piston mobil conține $m_1 = 40$g O_2 într-un compartiment și $m_2 = 70$ g N_2 în celălalt. Se cunosc lungimea tubului $L = 1$ m, masa pistonului $m = 2$ kg, temperatura comună $T = 300$ K. Să se determine poziția pistonului în cazurile: a) cilindrul este orizontal; b) cilindrul este vertical avînd compartimentul cu oxigen deasupra. Se neglijează dimensiunile pistonului ($\mu_1 = 32$ kg/kmol, $\mu_2 = 28$ kg/kmol).

2.9. După cîte curse ale pistonului unei pompe de vid cu volumul $v = 40$ cm³ se reduce presiunea într-un balon de la $p_i = 10^5$ N/m² la $p_f = 10$ N/m²? Volumul balonului este $V = 2000$ cm³.

2.10. Într-un tub orizontal de secțiune S și lungime L se află o coloană de lichid cu lungimea l și densitatea ρ, ce separă tubul în două părți egale (fig. 2.10). În cele două părți ale tubului se află aer la presiunea p. Tubul începe să se rotească în jurul unui ax vertical ce trece prin unul din capetele tubului, astfel încît lichidul se deplasează pe distanța d. Să se calculeze frecvența de rotație a tubului.

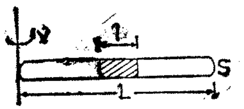

Fig. 2.10.

2.11. În dispozitivul reprezentat în figura 2.11 se cunosc $l_1 = 20$ cm, $l_2 = 40$ cm, $S_1 = 10$ cm², $S_2 = 40$ cm². Capătul A este închis de un dop cu grosimea neglijabilă. La capătul B se introduce un piston, care trebuie deplasat pe distanța $d = 10$ cm pentru ca dopul să sară. Considerînd presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m² să se calculeze forța de frecare dintre dop și tub, în momentul cînd sare dopul.

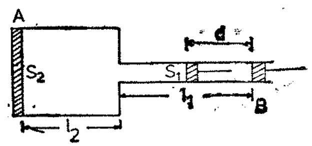

Fig. 2.11.

2.12. Într-o cameră de automobil cu volumul $V = 1,2 \cdot 10^{-2}$ m³, presiunea aerului este $p_i = 0,5 \cdot 10^5$ N/m². Cîte apăsări de piston trebuie să se exercite asupra unei pompe de mînă pentru a crește presiunea aerului la $p_f = 1,5 \cdot 10^5$ N/m², dacă volumul pompei este $v = 3 \cdot 10^{-4}$ m³ iar presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m².

2.13. Să se arate că adiabata unui gaz perfect descrește mai repede decît izoterma aceluiași gaz.

• **2.14.** În figura 2.14 sînt reprezentate diagramele a două transformări izobare, respectiv, izocore ale unei aceleiași cantități de gaz ideal. Să se indice : a) care din presiunile p_1 sau p_2 este mai mare (fig. 2.14.a) ; b) care din volumele V_1 sau V_2 este mai mare (fig. 2.14.b).

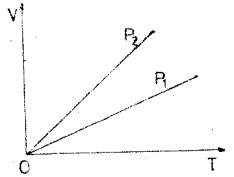

Fig. 2.14.a.

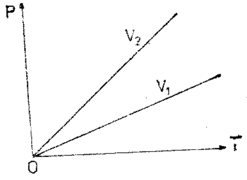

Fig. 2.14.b.

+ • **2.15.** Să se calculeze diametrul secțiunii transversale a unei conducte prin care circulă azot cu debitul masic $D_m = 31{,}4$ kg/min la presiunea $p = 10^6\ \text{N/m}^2$ și cu viteza $v = 20$ m/s, dacă temperatura este $t = 27°\text{C}$ ($\mu_N = 28$ kg/kmol).

+ **2.16.** Printr-o conductă cu secțiunea S, curge un gaz de masă molară μ, la presiunea p și temperatura t. Cunoscînd debitul de masă D_m al gazului, să se calculeze : a) debitul de volum ; b) viteza medie de curgere a gazului.

+• **2.17.** Doi cilindri orizontali de secțiuni $S_1 = 3 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$ și $S_2 = 10^{-2}\ \text{m}^2$ au pistoanele cuplate rigid cu ajutorul unei tije (fig. 2.17). În poziția inițială a pistoanelor se cunosc : $V_1 = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3$, $V_2 = 2 \cdot 10^{-3}\text{m}^3$, iar în interiorul și în exteriorul lor se află aer la presiunea $p_0 = 10^5\ \text{N/m}^2$ și temperatura $T = 300$ K. Primul cilindru este încălzit la $T_1 = 500$ K. Să se calculeze : a) presiunile finale în cilindri (p_1 ; p_2) ; b) distanța x cu care se deplasează pistoanele ; c) forța de comprimare din tijă.

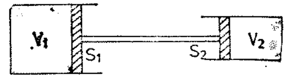

Fig. 2.17.

+ • **2.18.** Două corpuri de pompă identice A și B, cu secțiunea $S = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2$, sînt închise cu două pistoane legate solidar (fig. 2.18). Lungimile AP = P′B = a = 0,2 m, iar cilindrii conțin aer la $t_1 = 27°\text{C}$ și presiunea $p_1 = 10^5\ \text{N/m}^2$. Se încălzește vasul A pînă la temperatura $t_1' = 227°\text{C}$. Să se calculeze : a) deplasarea x a pistonului și presiunea finală p_2' în vasul B ; b) care va fi presiunea finală p_1'' în vasul A dacă se readuce vasul A la temperatura t_1, menținînd fixe pistoanele P și P′ ; c) ce masă de aer trebuie scoasă din vasul B pentru ca poziția pistoanelor P și P′ să rămînă fixă ($\mu_{aer} = 28{,}9$ kg/kmol) ?

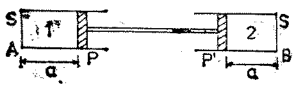

Fig. 2.18.

2.19. Un vas cilindric este împărțit cu ajutorul unui piston termoizolant în două părți de volume V_1 și V_2 conținînd același gaz la presiunile p_1 și p_2, avînd aceeași temperatură. Încălzind gazele pînă la temperaturile T_1, respectiv T_2 să se calculeze : a) cu cît se va modifica volumul gazelor ΔV, dacă pistonul se poate deplasa liber ; b) care este raportul densităților și al numărului de moli, din cele două vase, în stările inițială $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}; \frac{\nu_1}{\nu_2}\right)$ și finală $\left(\frac{\rho_1'}{\rho_2'}; \frac{\nu_1'}{\nu_2'}\right)$.

2.20. Un cilindru orizontal, de volum $V = 6$ l este împărțit în două compartimente de un piston termoizolant, care se poate deplasa fără frecare. Inițial pistonul se află în echilibru mecanic. Într-un compartiment se află $\nu_1 = 4$ moli la $T_1 = 300$ K iar în celălalt $\nu_2 = 6$ moli din alt gaz, la temperatura $T_2 = 400$ K. Să se calculeze : a) volumele ocupate de cele două gaze ; b) temperaturile la care pistonul se află la jumătatea cilindrului, presiunea rămînînd neschimbată.

• **2.21.** Un cilindru este închis la ambele capete și conține un gaz oarecare, fiind împărțit în două părți de un piston mobil (fig. 2.21). În cele două compartimente se află aceeași cantitate de gaz. Știind că la temperatura T raportul volumelor este $\frac{V_1}{V_2} = n$, să se calculeze valoarea raportului $\frac{V_1'}{V_2'}$ la temperatura T'.

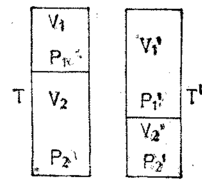

Fig. 2.21.

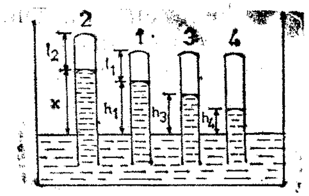

Fig. 2.22.

• **2.22.** Un tub barometric cu secțiunea $S = 1\ \text{cm}^2$ se umple cu mercur și se cufundă cu capătul deschis într-o cuvă cu mercur. Se introduce în camera barometrică $V_1 = 20\ \text{cm}^3$ aer. În această situație, înălțimea coloanei de Hg din tub va fi $h_1 = 40$ cm. Considerînd presiunea atmosferică normală $p_0 = 760$ torr și temperatura $t = 23°\text{C}$, să se calculeze : a) Ce înălțime trebuie să aibă tubul barometric față de nivelul Hg din cuvă, pentru ca volumul ocupat de aer să crească la $V_2 = 25\ \text{cm}^3$ (fig. 2.22) ; b). Considerînd poziția inițială, la ce temperatură ar trebui încălzit aerul din camera barometrică, pentru ca volumul să crească la $V_3 = 25\ \text{cm}^3$; c) Se introduce în starea inițială în camera barometrică o cantitate de hidrogen, înălțimea coloanei de Hg din tub devenind $h_4 = 20$ cm. Ce cantitate de hidrogen s-a introdus în tub ? $\mu_H = 2$ g/mol.

• **2.23.** Într-un barometru cu mercur a pătruns aer, astfel că la $t_1 = 15°C$ el arată o presiune $p_1 = 704$ torr, cînd adevărata presiune este $H_1 = 762$ torr. Tubul barometric are secțiunea $S = 1\ cm^2$ și înălțimea $l = 847$ mm. Să se calculeze : a) masa de aer ce a pătruns în barometru ; b) presiunea atmosferică dacă același barometru arată la temperatura $t_2 = 30°C$ o presiune $p_2 = 692$ torr ($\mu_{aer} = 28{,}9$ kg/kmol).

+ • **2.24.** Asupra unui balon umplut cu heliu acționează o forță ascensională $F_a = 29$ kN la înălțimea $h = 8000$ m, unde presiunea atmosferică este $p = 3{,}4 \cdot 10^4\ N/m^2$, iar temperatura aerului $T = 233$ K. Se cere : a) volumul balonului la această înălțime și masa de heliu necesară pentru încărcarea balonului ; b) volumul V' al balonului și forța ascensională F' la sol, unde presiunea atmosferică este $p_0 = 10^5\ N/m^2$, iar temperatura aerului $T' = 300$ K. Se neglijează greutatea balonului și variația accelerației gravitaționale cu înălțimea ($\mu_{aer} = 28{,}9$ kg/kmol ; $\mu_{He} = 4$ kg/kmol).

+ • **2.25.** Într-un cilindru cu piston se găsește un volum de gaz $V_0 = 2$ l în condiții normale ($T_0 = 273$ K, $p_0 = 10^5 N/m^2$). Pistonul poate comprima un arc, cu coeficientul de elasticitate $k = 1000$ N/m (fig. 2.25), aria pistonului fiind $S = 1\ dm^2$. Se încălzește gazul cu $\Delta T = 50$ K. Să se calculeze comprimarea Δl a arcului în urma încălzirii.

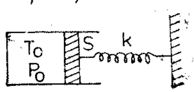

Fig. 2.25.

2.26. Două baloane cu volumele $V_1 = 200\ cm^3$ și $V_2 = 100\ cm^3$ sînt legate printr-un tub scurt ce conține o substanță poroasă care permite egalizarea presiunilor, dar nu și a temperaturilor celor două baloane. Inițial sistemul conține oxigen la presiunea de 760 mm Hg și se află la 27°C. Balonul mai mic este cufundat într-o baie de gheață la 0°C, iar balonul mai mare este introdus într-o baie cu aburi la 100°C. Să se calculeze presiunea finală în interiorul sistemului.

• **2.27.** Un rezervor cu volumul $V_1 = 50$ l este legat de un alt rezervor cu volumul $V_2 = 15$ l printr-un tub scurt care conține o supapă de evacuare ce permite trecerea gazului doar din rezervorul mare spre cel mic, dacă presiunea din rezervorul mare depășește presiunea din rezervorul mic cu 88 cm Hg. Dacă la 17°C rezervorul mai mare conține gaz la presiunea atmosferică și rezervorul mai mic este vidat, ce presiune are gazul din rezervorul mic cînd ambele rezervoare au 162°C?

• **2.28.** Două eprubete sînt așezate cu gura în jos într-un vas cu mercur. În prima eprubetă se află oxigen, iar mercurul se ridică pe o înălțime $h_1 = 10$ cm, iar în a doua eprubetă se află hidrogen și mercurul se ridică pînă la $h_2 = 12$ cm. Partea eprubetelor care se află în afara mercurului este $h = 30$ cm. În prima eprubetă se

găsesc $m_1 = 22{,}4$ mg de oxigen. Temperatura este $t_0 = 27°C$, iar aria secțiunii unei eprubete $S = 1\ cm^2$. Să se calculeze : a) presiunea atmosferică ; b) masa de hidrogen din eprubeta a doua ($\rho_{Hg} = 13{,}6 \cdot 10^3\ kg/m^3$).

+ • **2.29.** Un tub de sticlă închis la un capăt, de lungime $l = 50$ cm și cu secțiunea transversală de arie $S = 0{,}5\ cm^2$ este introdus în apă ca în figura 2.29. Greutatea tubului este $G = 15 \cdot 10^{-2}$N. Să se determine ce forță trebuie aplicată pentru a menține tubul sub apă, dacă distanța de la suprafața apei la capătul închis al tubului este $h = 10$ cm și presiunea atmosferică $p_0 = 10^5 N/m^2$.

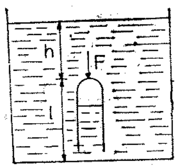

Fig. 2.29.

+ • **2.30.** Într-un cilindru închis cu lungimea $L = 1$ m și cu secțiunea $S = 2 \cdot 10^{-2} m^2$ plin cu oxigen se află un piston mobil, de grosime neglijabilă. Pistonul stă la mijlocul cilindrului iar gazul aflat în cele două compartimente se află la $t = 27°C$ și $p = 10^5 N/m^2$. Pistonul se deplasează cu $\Delta l = 0{,}4$ m față de poziția inițială. Să se calculeze : a) presiunile p_1 și p_2 din fiecare compartiment ; b) forța F ce trebuie să acționeze asupra pistonului pentru a-l menține în noua poziție ; c) masa Δm de oxigen ce trebuie eliminată dintr-un compartiment pentru ca pistonul rămas liber, să nu se deplaseze ($\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol).

+ **2.31.** Într-un recipient cu $V_1 = 10$ l se află oxigen la $t_1 = 17°C$ și $p_1 = 10^6\ N/m^2$. Cunoscînd masa molară a oxigenului $\mu = 32$ kg/kmol, se cere : a) masa și densitatea oxigenului din recipient ; b) cîți moli de oxigen trebuie scoși din recipient pentru ca presiunea să scadă la valoarea $p_2 = 2 \cdot 10^5\ N/m^2$, temperatura rămînînd constantă.

+ **2.32.** Într-un recipient cu pereții rigizi se află $m_1 = 20$ kg oxigen la temperatura $t_1 = 27°C$. Ce cantitate de oxigen trebuie evacuată în ipoteza că gazul se încălzește la $t_2 = 59°C$, presiunea rămînînd constantă ($\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol).

2.33. Pentru determinarea densității unui gaz s-a procedat în felul următor : s-a umplut un balon de sticlă de volum V cu gazul studiat la o presiune p_1. Masa balonului cu gaz a fost m_1. Apoi s-a scos o parte din gaz, pînă ce presiunea a ajuns la p_2, iar masa balonului cu restul de gaz a fost m_2. Știind că determinarea s-a făcut la o temperatură constantă T, să se calculeze densitatea gazului în condiții normale.

+ • **2.34.** Într-o butelie se află azot la temperatura $T_1 = 300$ K și presiunea $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^7\ N/m^2$. Din butelie s-a consumat azot pentru o experiență. La temperatura $T_2 = 280$ K presiunea gazului este $p_2 = 0{,}6 \cdot 10^7\ N/m^2$, iar masa gazului a scăzut cu $\Delta m = 3{,}2$ kg. Să se determine : a) numărul de moli de azot în starea inițială ; b) masa de azot rămasă în butelie.

• **2.35.** Un rezervor metalic cu volumul constant V este umplut cu hidrogen la $t_1 = 27°C$ și $p_1 = 10^5\ N/m^2$. Se ridică temperatura gazului la $t_2 = 57°C$, iar pentru a menține presiunea constantă se scoate din rezervor $\Delta m = 50\ g$. Se cer: a) densitățile ρ_1 și ρ_2 ale gazului în condițiile date și în condiții normale; b) volumul V al rezervorului; c) masa de hidrogen m_2 și numărul de molecule N_2 rămase în rezervor ($\mu_{H_2} = 2\ kg/kmol$).

2.36. Într-un recipient cu volumul $V_1 = 8\ l$ se află oxigen la temperatura $t_1 = 17°C$ și presiunea $p_1 = 10^6\ N/m^2$. Se cer: a) masa oxigenului din recipient (m_1); b) cîți moli de oxigen trebuie scoși din recipient pentru ca presiunea să scadă la $p_2 = 2\cdot 10^5\ N/m^2$, temperatura rămînînd constantă; c) în condițiile punctului doi ce cantitate de gaz trebuie evacuată din recipient în ipoteza că gazul se încălzește la $t_3 = 47°C$, pentru ca presiunea să rămînă constantă ($\mu_{O_2} = 32\ kg/kmol$).

• **2.37.** Un rezervor metalic cu volum constant V este umplut cu hidrogen la temperatura $t_1 = 15°C$ și presiunea $p_1 = 1$ atm. Sub influența radiației solare temperatura gazului se ridică la $t_2 = 37°C$. Pentru a menține în rezervor presiunea constantă p_1 o parte din hidrogen este eliminat printr-o supapă. Ca urmare a acestui fapt, masa hidrogenului din rezervor se micșorează cu $m = 6{,}052$ kg. Densitatea hidrogenului în condiții normale ($t = 0°C$ și $p_0 = 1$ atm.) fiind $\rho_0 = 89\cdot 10^{-3}\ kg\cdot m^{-3}$, să se calculeze: a) Densitatea inițială a hidrogenului din rezervor; b) Volumul rezervorului; c) Greutatea hidrogenului rămas în rezervor; d) Numărul n de molecule de hidrogen rămase în rezervor, masa unui mol de hidrogen fiind egală cu 2 g; e) Presiunea p_3 a gazului rămas în rezervor, dacă, după ce s-a ridicat temperatura la 37°C și s-a eliminat o parte din hidrogen se închide supapa și se ridică temperatura la 87°C.

2.38. Un vas cu $V = 8\cdot 10^{-2} m^3$ este împărțit în două compartimente avînd volumele în raportul $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$, cu ajutorul unui filtru semipermeabil; în primul vas se află $m_1 = 4\cdot 10^{-2}$ kg hidrogen, iar în al doilea $\nu_2 = 5\cdot 10^{-3}$ kmol de azot. Temperatura întregului vas este aceeași $T = 300$ K. Să se calculeze presiunea în fiecare compartiment, dacă filtrul permite numai trecerea hidrogenului ($\mu_1 = 2\ kg/kmol$; $\mu_2 = 28\ kg/kmol$).

2.39. Un amestec este alcătuit din $m_1 = 8$ g heliu și $m_2 = 4$ g argon, la temperatura $t = 17°C$ și presiunea $p = 10^6\ N/m^2$. Să se calculeze: a) masa moleculară medie a amestecului; b) densitatea amestecului în condițiile date și în condiții normale de presiune și temperatură; c) volumul V ocupat de amestec; d) presiunile parțiale p_{1p} și p_{2p} ale gazelor ($\mu_1 = 4\ kg/kmol$; $\mu_2 = 40\ kg/kmol$).

2.40. Un cilindru orizontal închis la capete, este împărțit în două compartimente de un piston termoizolant, care se poate deplasa fără frecare. Inițial, pistonul se află în echilibru mecanic, raportul volumelor fiind $\frac{V_1}{V_2} = n_1$, la temperatura T. Să se calculeze: a) cu cîte grade ΔT trebuie răcit primul compartiment, iar celălalt încălzit, pentru ca raportul volumelor să devină $\frac{V_1'}{V_2'} = n_2$; b) raportul presiunilor $\frac{p}{p'}$ în cele două situații. Se cunosc n_1, n_2 și T.

2.41. Un vas cilindric orizontal este împărțit de un piston, ce se poate mișca liber fără frecare, în două compartimente. Într-un compartiment se află $m_1 = 4\cdot 10^{-3}$ kg de hidrogen, iar în celălalt $m_2 = 32\cdot 10^{-3}$ kg de oxigen. Să se calculeze: a) raportul $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)$ dintre volumul ocupat de hidrogen și volumul total al cilindrului; b) rapoartele densităților $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ și numerelor de moli $\frac{\nu_1}{\nu_2}$.

• **2.42.** Un recipient format din două compartimente de volume constante $V_1 = 2\ m^3$ și $V_2 = 4\ m^3$, legate printr-o conductă de volum neglijabil, este umplut cu $\nu = 0{,}2$ kmol gaz ideal. Prin deschiderea robinetului se stabilește aceeași presiune, iar recipientele sînt aduse la temperaturile $T_1 = 400$ K și $T_2 = 600$ K. Să se calculeze numărul molilor de gaz ν_1 și ν_2 aflați în fiecare incintă în starea finală.

2.43. Două tuburi ce conțin oxigen sînt caracterizate prin parametrii de stare: $V_1 = 50\ l$, $t_1 = 7°C$, $p_1 = 10^6\ N/m^2$ și $V_2 = 100\ l$, $t_2 = 27°C$, $p_2 = 6\cdot 10^6\ N/m^2$. Se deschide robinetul ce unește cele două tuburi, temperatura comună devenind $t = 17°C$. Să se calculeze: a) Diferențele densității ($\Delta\rho$), numărului total de molecule (ΔN) și a numărului de molecule din unitatea de volum (Δn) din cele două tuburi înaintea deschiderii robinetului; b) Presiunea comună p după deschiderea robinetului; c) Cantitatea de oxigen (Δm) ce trece dintr-un vas în altul. Numărul lui Avogadro este $N_A = 6{,}023\cdot 10^{26}$ molecule/kmol ($\mu_{O_2} = 32\ kg/kmol$).

2.44. Două tuburi de volume V_1 și V_2 conțin același gaz la presiunile p_1 și p_2 avînd temperaturile T_1 și respectiv T_2. Cunoscînd masa molară μ a gazului să se calculeze: a) Diferența volumelor $\Delta V_0 = V_{01} - V_{02}$, unde V_{01} și V_{02} sînt volumele ocupate de gazul din cele două recipiente în condiții normale; b) Se deschide robinetul ce unește cele două tuburi și se stabilește o temperatură comună T.

Care este presiunea finală p şi presiunile parţiale p_{1p} şi p_{2p} după deschiderea robinetului; c) Cîţi moli de gaz ($\Delta\nu$) trec dintr-un recipient în altul.

2.45. Un corp de pompă de volumul $V = 5 l$, conţine la temperatura $t = 27°C$ un număr $N_1 = 10^{23}$ molecule oxigen, $N_2 = 5 \cdot 10^{23}$ molecule azot şi $m_3 = 39$ g argon. Amestecul este încălzit izobar pînă la temperatura $t_f = 97°C$. Cunoscînd masa molară a oxigenului $\mu_1 = 32$ kg/kmol, a azotului $\mu_2 = 28$ kg/kmol, a argonului $\mu_3 = 39$ kg/kmol şi numărul lui Avogadro $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol, să se calculeze: a) Presiunea amestecului de gaze; b) Masa molară medie a amestecului; c) Volumul final al amestecului de gaze.

+ • **2.46.** Într-un vas cilindric închis vidat se află un piston AB susţinut de un resort (fig. 2.46). Iniţial pistonul se află pe fundul cilindrului. Introducînd o cantitate de gaz la temperatura $t = 27°C$ sub piston, acesta se va ridica cu $h_1 = 10$ cm. Să se determine înălţimea la care se va ridica pistonul, dacă sub piston se introduce o cantitate de gaz de $n = 5$ ori mai mare la temperatura $t_2 = 37°C$. Se neglijează frecarea dintre pereţii vasului şi piston.

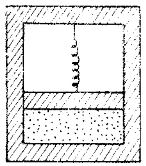

Fig. 2.46.

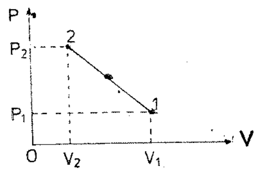

Fig. 2.47.

• **2.47.** Într-un cilindru cu piston se află $m = 20$ g He. Gazul suferă o transformare lentă din starea 1, în care $p_1 = 0{,}41 \cdot 10^6$ N/m² şi $V_1 = 32 \cdot 10^{-3}$ m³, în starea a doua, în care $p_2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ N/m² şi $V_2 = 9$ dm³. În coordonate $p - V$ transformarea este o dreaptă (fig. 2.47). Să se calculeze valoarea temperaturii maxime atinse de gaz în această transformare ($\mu_{He} = 4$ kg/kmol).

2.48. Un balon cu volumul $V_1 = 1$ dm³ conţine $\nu_1 = 1$ kmol de gaz ideal. Balonul se află într-un cilindru închis cu volumul $V_2 = 1$ m³ ocupat de $\nu_2 = 996{,}6$ kmol din acelaşi gaz. Sistemul este încălzit, temperatura fiind aceeaşi în întregul sistem. Volumele se consideră constante. Pereţii balonului nu suportă o presiune mai mare decît $p_b = 10^7$ N/m². Presupunînd că pereţii cilindrului nu cedează, să se determine: a) temperatura la care pereţii balonului cedează; b) presiunea din cilindru după explozie, la temperatura la care a avut loc explozia; c) în ce condiţii explozia nu se produce oricît ar creşte temperatura sistemului. Constanta gazelor ideale $R = 8310$ J/kmol·K.

2.49. Un recipient cu volumul $V_1 = 1$ dm³ conţine $\nu_1 = 1$ mol de gaz ideal. Recipientul se află într-un vas cu volumul $V_2 = 10$ dm³ în care se află ν_2 moli din acelaşi gaz ideal. Gazele se încălzesc la volume constante şi îşi menţin aceeaşi temperatură. Pereţii recipientului suportă presiuni mai mici decît $p = 10^5$ N/m², iar ai vasului presiuni mai mici decît $P = 10^6$ N/m². Să se calculeze: a) între ce valori poate fi cuprins numărul de moli ν_2 pentru ca explozia recipientului să provoace şi explozia vasului; b) valoarea lui ν_2 pentru ca explozia recipientului să se producă simultan cu cea a vasului; c) valoarea lui ν_2 pentru ca să se producă întîi explozia vasului exterior.

+ • **2.50.** Într-un cilindru vertical închis în partea de sus cu un piston cu masa $M = 20$ kg se află $m = 1$ g heliu la temperatura $T = 400$ K (figura 2.50). Alungirea resortului A este egală cu $x = 20$ cm, iar energia de deformare $E = 60$ J. Să se calculeze distanţa de la baza cilindrului pînă la piston. Presiunea gazului în afara cilindrului este neglijabilă ($\mu_{He} = 4$ kg/kmol).

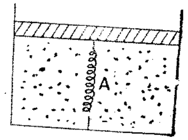

Fig. 2.50.

2.51. Două incinte de volume $V_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ m³ şi $V_2 = 10^{-2}$ m³ sînt umplute cu heliu şi se află la aceeaşi temperatura $T = 300$ K. Incintele pot comunica între ele printr-un tub de volum neglijabil, închis iniţial de un robinet. Presiunile gazului în cele două incinte sînt: $p_1 = 5 \cdot 10^5$ N/m² şi $p_2 = 10^6$ N/m². Se deschide robinetul. Temperatura se menţine aceeaşi. Se închide apoi robinetul iar incinta a doua este încălzită pînă la temperatura $T_2 = 400$ K. Să se calculeze: a) Masa totală a gazului şi numărul molilor de gaz aflaţi în fiecare incintă în starea iniţială; b) Masa heliului şi numărul molilor din fiecare incintă după deschiderea robinetului; c) Presiunile finale în cele două vase după încălzire; d) Variaţia energiei interne a gazului din fiecare incintă ($\mu_{He} = 4$ kg/kmol).

+ **2.52.** Un vas cilindric de masă M conţine aer la presiunea atmosferică p_0 şi are volumul V_0 închis cu un piston de arie S şi masă neglijabilă. Vasul este introdus în apă cu densitatea ρ_0. Un fir trecut peste un scripete de masă neglijabilă are un capăt fixat de piston, iar celălalt se trage cu forţa F (figura 2.52). Să se determine distanţa x dintre suprafaţa lichidului şi cea a pistonului în funcţie de forţa F.

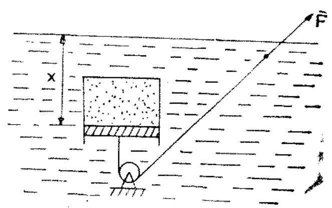

Fig. 2.52.

2.53. Într-un tub orizontal, al cărui profil este înfățișat în figura 2.53 se află două pistoane unite printr-o tijă. Ariile pistoanelor sînt $S_1 = 20$ cm^2 și $S_2 = 50$ cm^2. Pistonul din dreapta este legat de punctul fix 0 printr-un resort cu constanta elastică 400 N/m. Inițial aerul dintre cele două pistoane se află la presiunea $p_0 = 10^5$ N/m^2 și temperatura $T_0 = 300$ K, iar resortul este nedeformat. Apoi gazul dintre pistoane se încălzește la $T = 500$ K. Să se determine forța elastică ce apare în resort.

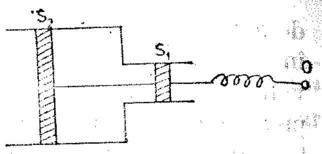

Fig. 2.53.

2.2. Principiile termodinamicii

2.54. Pentru încălzirea unui gaz cu 25 K la presiune constantă se folosește o cantitate de căldură de 500 J iar la răcirea aceluiași gaz cu 75 K la volum constant se eliberează o cantitate de căldură egală cu 1,07 kJ. Să se calculeze indicele adiabatic γ.

2.55. Căldurile specifice ale unui gaz sînt: $c_V = 650$ J/kg·K și $c_p = 910$ J/kg·K. Să se găsească despre ce gaz este vorba și să se calculeze numărul de grade de libertate i ale moleculelor.

2.56. Densitatea unui gaz în condiții normale este egală cu 1,25 kg/m^3. Raportul căldurilor molare la presiune constantă și volum constant este egal cu 1,4. Să se calculeze căldurile specifice la presiune constantă c_p și la volum constant c_V.

2.57. Să se calculeze căldurile specifice c_V și c_p ale unui gaz ideal, cunoscînd: a) gazul este biatomic, iar $\rho_0 = 1{,}43$ kg/m^3; b) masa molară $\mu = 30$ kg/kmol și raportul $\gamma = c_p/c_V = 1{,}4$.

2.58. De cîte ori sînt mai mari căldurile molare la volum constant și presiune constantă ale amestecului gazos de hidrogen și oxigen față de cele ale vaporilor de apă rezultați prin arderea amestecului de gaze?

2.59. Un vas de volum $V = 2{,}55$ l conține $m = 15$ mg de hidrogen la temperatura de 2700°C. La această temperatură o parte din moleculele de hidrogen se descompun în atomi. Gradul de disociere (raportul dintre numărul de molecule disociate și numărul lor total) este $\alpha = 0{,}25$. Să se calculeze: a) presiunea gazului și b) căldura specifică c_V a hidrogenului în aceste condiții.

2.60. Să se calculeze căldura molară a unui gaz ideal într-un proces în care temperatura gazului: a) este proporțională cu pătratul volumului gazului și b) este invers proporțională cu volumul său. Se cunoaște căldura molară la volum constant a gazului C_V.

2.61. Un mol de gaz monoatomic se află la temperatura $t_1 = 27$°C într-un recipient neizolat termic și prevăzut cu un piston mobil. Gazul este încălzit absorbind o cantitate de căldură $Q = 8{,}31$ Wh, și i se permite să se destindă izobar. Să se calculeze: a) temperatura finală T_2; b) Raportul dintre volumul final și cel inițial; c) Lucrul mecanic efectuat de gaz.

2.62. În figura 2.62 sînt reprezentate în coordonate $V-T$ două procese ciclice. În care din aceste cicluri 1—2—3—1 sau 1—3—4—1 se efectuează un lucru mecanic mai mare?

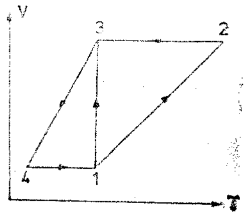

Fig. 2.62.

2.63. În cursul umplerii unui balon cu gaz biatomic conținut într-o butelie presiunea gazului din butelie scade de la valoarea inițială $p_1 = 50$ atm. la valoarea $p_2 = \frac{1}{2} p_1$, măsurată la aceeași temperatură ca și p_1 egală cu $t_0 = 27$°C. Volumul ocupat de gazul din balon la presiunea atmosferică p_0 și temperatura t_0 este $V = 8{,}31$ m^3, iar volumul maxim al balonului la presiunea p_0 este $V' = 1{,}1\ V$. Să se determine: a) Raportul densităților gazului din butelie înainte și după umplerea balonului; b) Numărul de moli de gaz aflați în butelie înainte și după umplerea balonului; c) Temperatura la care balonul atinge volumul său maxim la presiunea p_0 și lucrul mecanic efectuat în cursul încălzirii pînă la această temperatură; d) Variația energiei interne a gazului din balon și căldura absorbită în cursul încălzirii.

2.64. Să se calculeze: a) căldura necesară unei mase de hidrogen $m = 0{,}2$ kg pentru a-și ridica temperatura de la $t_1 = 0$°C la temperatura $t_2 = 100$°C la presiune constantă; b) variația energiei interne a gazului și lucrul mecanic efectuat.

2.65. O cantitate de oxigen ocupă volumul $V_1 = 1$ m^3 și se află la presiunea $p_1 = 2 \cdot 10^5$N/m^2. Gazul a fost încălzit la presiune constantă pînă la volumul $V_2 = 3$ m^3 și apoi la volum constant pînă la presiunea $p_2 = 5 \cdot 10^5$ N/m^2. Să se reprezinte grafic procesele și să se calculeze: a) Variația ΔU a energiei interne a gazului; b) Lucrul mecanic efectuat; c) Cantitatea de căldură primită de gaz $\left(C_V = \frac{5}{2} R\right)$.

2.66. O masă de hidrogen $m_H = 100$ g, închisă într-un cilindru orizontal cu piston este încălzită de la un încălzitor cu un randament $\eta = 0{,}6$. Să se calculeze: a) Căldura primită de masa de gaz pentru a-și mări temperatura cu $\Delta T = 100$ K într-o transformare izobară, respectiv izocoră; b) Lucrul mecanic efectuat în timpul transfor-

mării izobare; Să se compare acest lucru mecanic cu diferența dintre căldurile primite de gaz în transformarea izobară și cea izocoră; c) Cantitățile de benzină consumată de încălzitor pentru fiecare încălzire. Se cunosc $\mu_H = 2$ kg/kmol, $c_V = 9{,}8$ kJ/kg · K, $q = 46$ MJ/kg.

2.67. Să se calculeze raportul dintre lucrul mecanic efectuat într-o transformare adiabatică și una izotermă, la comprimarea unui volum de gaz de la volumul $V_1 = 5$ l la volumul $V_2 = 1$l. Cum este mai avantajos? $\left(C_V = \frac{5}{2} R\right)$.

2.68. Un kmol de azot aflat în condiții normale se destinde adiabatic de la volumul V_0 la $V_1 = 5V_0$. Să se determine: a) Variația energiei interne a gazului; b) Lucrul mecanic efectuat în timpul destinderii. Se cunoaște $C_V = \frac{5}{2} R$.

2.69. Pentru comprimarea izobară a $\nu = 10$ moli de oxigen ce ocupă un volum $V_1 = 0{,}082$ m^3 se efectuează un lucru mecanic $L_{12} = 8310$ J. Destinzînd apoi sistemul izoterm la temperatura $t_2 = 27°$C să se calculeze presiunea finală p_3 a oxigenului, dacă lucrul mecanic în comprimarea izobară este egal cu lucrul mecanic în destinderea izotermă ($L_{12} = L_{23}$) (fig. 2.69).

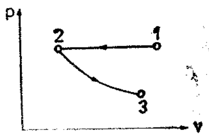

Fig. 2.69.

2.70. Un corp de pompă de formă cilindrică are diametrul interior $d = 20$ cm. Pistonul are masa $m = 40$ kg și alunecă fără frecare. Distanța pistonului față de bază este $h = 50$ cm, iar aerul are temperatura $t = 27°$C (fig. 2.70). Prin încălzirea aerului pistonul se ridică cu $\Delta h = 10$ cm. Cunoscînd presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m^2 se cere: a) Temperatura finală T_2 în corpul de pompă; b) Lucrul mecanic produs prin dilatarea aerului; c) Căldura necesară și variația energiei interne a gazului; d) Cantitatea de combustibil consumat dacă randamentul termic al încălzirii este $\eta = 60\%$ iar puterea calorică a combustibilului $q = 5 \cdot 10^7$ J/kg.

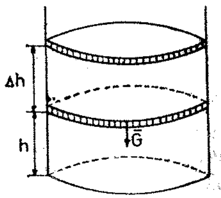

Fig. 2.70.

2.71. Două cantități egale din două gaze diferite A și B, avînd același volum inițial V_0 și aceeași presiune inițială p_0 sînt comprimate brusc adiabatic, fiecare ajungînd la jumătate din volumul inițial. a) Să se calculeze presiunile finale ale celor două gaze dacă $\gamma_A = \frac{5}{3}$,

iar $\gamma_B = \frac{7}{5}$. b) Să se găsească raportul dintre lucrurile mecanice necesare pentru realizarea celor două comprimări.

2.72. Un kmol de gaz ideal trece din starea definită de temperatura $T_1 = 300$ K, și presiunea $p_1 = 10$ atm. în starea cu presiunea $p_2 = 1$ atm. printr-o transformare politropă $pV^n = $ ct, unde $n = 1{,}2$. Să se calculeze: a) Lucrul mecanic efectuat asupra gazului; b) Căldura schimbată de gaz cu mediul exterior; c) Căldura molară a gazului în transformarea politropă.

2.73. Un gaz ideal se destinde după legea $p = aV + b$, de la volumul $V_1 = 10$ l la $V_2 = 20$ l. Cunoscînd constantele $a = 10^6$ N/m^5 și $b = 10^5$ N/m^2, să se calculeze: a) Lucrul mecanic efectuat de gaz; b) Variația energiei interne a gazului; c) Căldura absorbită de gaz; d) Căldura molară în această transformare.

2.74. O cantitate ν moli gaz ideal, aflat la presiunea p_1 și T_1 se destinde după legea: $T = aV - bV^2$ unde a și b sînt două constante. Se cere: a) Variația energiei interne a gazului atunci cînd volumul său se mărește de n ori; b) Relația dintre a și b pentru ca energia internă în starea finală a gazului să fie egală cu energia internă în starea inițială; c) Lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul destinderii de la punctul a) al problemei. Se cunosc γ și R.

2.75. Un gaz ideal $\left(C_V = \frac{5}{2} R\right)$ evoluează între stările 1 și 2 conform legilor $T = aV^2$ sau $V = aT^2$ unde a este o constantă. Cunoscînd variația energiei interne $U = 200$ J în prima transformare, să se calculeze: a) Lucrul mecanic și căldura schimbate de gaz în fiecare transformare; b) În care din aceste transformări temperatura gazului ar crește mai mult dacă ar primi aceeași căldură.

2.76. Într-un cilindru de masă m, închis la capete, cu fețe plane și izolat termic, se află în echilibru un piston de masă M. În cele două compartimente ale cilindrului se află cîte un mol de gaz ideal cu căldura molară la volum constant C_V. Cilindrului i se transmite un impuls p de-a lungul axei sale. Să se calculeze variația temperaturii gazului din cilindru după încetarea oscilațiilor pistonului. Frecarea dintre piston și cilindru este neglijabilă.

2.77. Pentru determinarea căldurii specifice a zincului s-a încălzit o bucată de zinc avînd masa $m = 235{,}6$ g pînă la temperatura de $t_1 = 99{,}3°$C și s-a introdus într-un calorimetru de alamă. Căldura specifică a alamei este 389,2 J/kg · K, masa calorimetrului 0,1 kg, iar masa apei 209,3 g, temperatura inițială a calorimetrului și a apei $t_0 = 20{,}5°$C și temperatura finală 27,6°C. Să se determine căldura specifică a zincului.

+ • **2.78.** Două sfere cu masele $m_1 = 2$ kg şi $m_2 = 5$ kg se mişcă cu vitezele $v_1 = 5$ m/s şi $v_2 = 2$ m/s, după două direcţii ce fac între ele unghiul $\varphi = 60°$. Dacă ciocnirea sferelor este plastică să se calculeze : a) Viteza lor finală; b) Variaţia temperaturii celor două corpuri de aceeaşi natură, dacă se consideră că $\eta = 60\%$ din căldura degajată prin ciocnire este absorbită de corpuri. Se cunoaşte $c = 459{,}8$ J/kg·K.

2.79. Să se calculeze căldurile specifice c_V şi c_p ale unui amestec de neon şi hidrogen. Proporţiile în care fiecare gaz se află în amestec sînt : $r_1 = 0{,}8$ şi respectiv $r_2 = 0{,}2$, iar căldurile lor specifice sînt: $c_{V_1} = 624$ J/kg·K; $c_{p_1} = 1{,}04 \cdot 10^3$ J/kg·K, $c_{V_2} = 10{,}4 \cdot 10^3$ J/kg·K şi $c_{p_2} = 14{,}6 \cdot 10^3$ J/kg·K.

2.80. Un recipient cu volumul de 10 l conţine gaz metan la 27°C şi presiunea de 6 atm. Se cer : a) Densitatea metanului din recipient; b) Timpul în care un motor termic cu randamentul de 25% şi cu puterea de 2090 W ar consuma întreaga cantitate de gaz metan din recipient; c) Cantitatea de apă m la 14,4°C, care se poate încălzi pînă la fierbere arzînd atîta metan din recipientul plin, pînă cînd presiunea finală rămîne 2 atm. Se dau puterea calorică a metanului, $q = 35{,}78$ MJ/m³, masa moleculară a metanului $\mu = 16$ kg/kmol, $c_{apă} = 4185$ J/kg·K.

+ • **2.81.** Un boiler consumă $V = 2$ m³ gaz metan în timpul $\tau = 1$ h, la temperatura $\theta = 12°$C. Boilerul are un randament $\eta = 25\%$. Gazul vine pe conductă cu $p = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/m², şi are puterea calorică $q = 6 \cdot 10^7$ J/kg, iar masa molară $\mu = 16$ kg/kmol. Jetul de apă are viteza $v = 40$ cm/s, diametrul $d = 1{,}2$ cm, temperatura iniţială $t_1 = 10°$C. Să se calculeze temperatura t_2 cu care iese jetul de apă la consumator.

+ • **2.82.** Un gaz ideal avînd căldura molară la volum constant $C_V = \frac{5}{2}R$ parcurge ciclul din figura 2.82. Se cunosc $T_A = 300$ K, $V_A = 1$ l, $V_B = V_C = 2$ l iar tg $\alpha = a = 10^8$ N/m⁵. Să se calculeze : a) Parametrii în stările A, B şi C; b) Lucrul mecanic pe fiecare transformare şi pe ciclul întreg; c) Variaţia energiei interne în fiecare transformare şi pe ciclul întreg; d) Căldura pe fiecare transformare şi variaţia totală a entropiei.

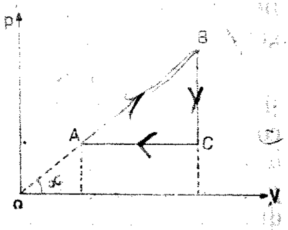

Fig. 2.82.

+ • **2.83.** Un gaz ideal avînd căldura molară la volum constant $C_V = \frac{3}{2}R$, efectuează ciclul reversibil din figura 2.83. Să se calculeze : a) Lucrul mecanic, căldura şi variaţia energiei interne pentru fiecare transformare; b) Lucrul mecanic al ciclului (L_t), căldura Q_1 primită şi Q_2 cedată; c) Randamentul ciclului.

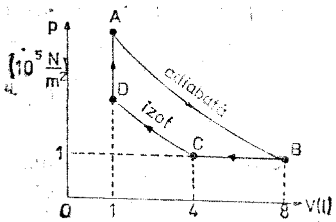

Fig. 2.83.

+ • **2.84.** O maşină termică ideală funcţionează după un ciclu Carnot între temperaturile $t_1 = 423°$C şi $t_2 = 23°$C. Ea urcă un corp cu masa $m = 400$ kg pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 30°$, cu frecare, avînd coeficientul de frecare $\mu = 0{,}1$. Viteza la baza planului este $v_1 = 18$ km/h iar după $t = 3$ minute, viteza ajunge la $v_2 = 72$ km/h. Să se calculeze : a) Forţa de tracţiune; b) Puterea medie şi puterea maximă dezvoltată de motorul maşinii; c) Căldura Q_1 preluată de la sursa caldă şi căldura Q_2 cedată sursei reci în acest timp; d) Cantitatea de combustibil gazos consumat dacă se cunoaşte că randamentul termic este $\eta = 40\%$, puterea calorică $q = 2{,}7 \cdot 10^6$ J/m³N iar densitatea gazului $\rho_0 = 1{,}9$ kg/m³.

2.85. O maşină termică ideală cu randamentul $\eta_c = 60\%$ are diferenţa dintre temperaturile celor două surse de căldură $\Delta T = 420$ K. Consumul de combustibil pentru încălzirea agentului termic din maşină este $D_c = 1{,}5$ kg/h, iar puterea calorică a combustibilului $q = 1{,}5 \cdot 10^7$ J/kg. Azotul, folosit drept agent termic în maşină, este evacuat la temperatura T_2 a izvorului mai rece şi la presiunea $p_2 = 2 \cdot 10^5$ N/m². Să se calculeze: a) puterea utilă a maşinii; b) volumul azotului (V_2) la ieşirea din maşina termică, dacă masa lui este $m = 14$ g, iar masa molară $\mu = 28$ kg/kmol; c) căldura primită de la sursa caldă (Q_1) şi căldura cedată sursei reci (Q_2) în timpul $t = 30$ minute.

2.86. O maşină termică ce funcţionează cu cărbune are un randament de 80% din randamentul unei maşini termice ideale ($\eta_1 = 0{,}8\ \eta_c$) ce ar lucra între aceleaşi limite de temperatură. Maşina termică acţionează un dinam ce trebuie să furnizeze o putere utilă $P_{u_2} = 100$ kW avînd un randament $\eta_2 = 90\%$. Temperatura sursei calde este $t_1 = 227°$C şi a sursei reci $t_2 = 27°$C. Să se calculeze : a) puterea utilă a maşinii termice şi randamentul η_1 al acesteia; b) puterea pierdută prin folosirea acestei maşini termice; c) cantitatea de cărbune consumat în timp $t = 1$ h dacă puterea calorică este $q = 3{,}14 \cdot 10^7$ J/kg.

2.87. O maşină termică ideală are diferenţa dintre temperaturile celor două surse de căldură $\Delta T = 300$ K şi temperatura sursei reci $T_2 = 273$ K. Consumul de combustibil pentru încălzirea agentului

termic din mașină este $D_m = 0{,}75$ kg/h iar puterea calorică a combustibilului $q = 1{,}5 \cdot 10^7$ J/kg. Să se calculeze: a) randamentul și puterea utilă a mașinii termice; b) volumul V_1 al azotului ocupat la temperatura T_1 a sursei calde, dacă masa lui este $m = 28$ g, iar $\mu = 28$ kg/kmol și $p_1 = 4 \cdot 10^5$ N/m²; c) variația vitezei termice a unei molecule de azot cînd temperatura gazului scade de la t_1 la t_2; d) căldura primită de la sursa caldă Q_1 și căldura cedată sursei reci Q_2 în timpul $t = 2$ ore.

+ **2.88.** Să se calculeze randamentul unui motor cu reacție care funcționează după un ciclu format din două adiabate și două izobare, dacă se cunoaște raportul de compresie $\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2} = 5$, iar substanța de lucru este aerul pentru care $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = 1{,}4$.

2.89. Să se calculeze randamentul unui ciclu Carnot efectuat de un gaz biatomic dacă: a) în dilatarea adiabatică volumul gazului crește de la 6 la 7 m³; b) pentru fiecare kmol de gaz în compresia adiabatică se efectuează un lucru mecanic de 2 MJ, temperatura sursei calde fiind de 127°C.

2.90. Un kmol de gaz ideal efectuează un ciclu compus din alternanța de izoterme și adiabate din figura 2.90. Fiecare detentă izotermă este însoțită de o creștere a volumului de k ori. Știind că izotermele au loc la temperaturile T_1, T_2 și T_3 să se calculeze: a) randamentul ciclului η; b) lucrul mecanic efectuat de gaz în decursul unui ciclu.

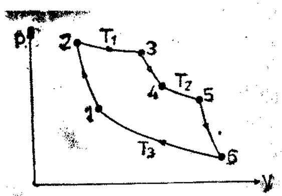

Fig. 2.90.

2.91. Un ciclu parcurs de hidrogen se compune din două izocore și două izobare. Să se calculeze lucrul furnizat de gaz în decursul unui ciclu și randamentul ciclului știind că valorile maxime ale volumului și presiunii sînt duble față de valorile minime care sînt $p_{min} = 10^5$ N/m² și $V_{min} = 0{,}5$ m³.

+ **2.92.** Un ciclu efectuat de 2 kmoli de gaz ideal monoatomic se compune dintr-o izotermă, o izobară și o izocoră. Transformarea izotermă are loc la temperatura maximă a ciclului $T_{max} = 400$ K. Știind că în decursul ciclului volumul de gaz variază de două ori, adică $V_{max}/V_{min} = a = 2$, să se calculeze: a) Lucrul mecanic efectuat de gaz într-un ciclu și randamentul ciclului; b) Să se compare randamentul ciclului cu randamentul unui ciclu Carnot efectuat între temperaturile T_{max} și T_{min} ale ciclului considerat.

2.93. Un gaz ideal monoatomic se încălzește izocor de la presiunea p_1 la presiunea p_2. În continuare gazul se destinde izoterm pînă la presiunea inițială și apoi se comprimă izobar pînă la volumul inițial. Să se calculeze randamentul ciclului dacă $\dfrac{p_2}{p_1} = 2$.

+ **2.94.** Un gaz efectuează ciclul de transformări din figura 2.94 unde transformarea 3—4 este adiabatică. Se cunosc $V_0 = 0{,}5$ l, $V_1 = 1{,}5$ l, $V_2 = 3$ l, $p_0 = 1$ atm., $p_1 = 12$ atm. și $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V} = 1{,}33$. Să se calculeze: a) Lucrul mecanic efectuat de gaz; b) Randamentul ciclului.

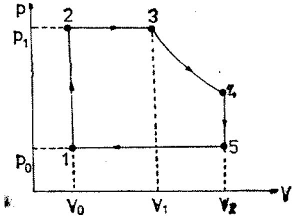

Fig. 2.94.

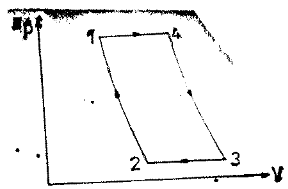

Fig. 2.95.

+ **2.95.** Să se calculeze eficiența unei mașini frigorifice care funcționează după ciclul din figura 2.95. Eficiența unei mașini frigorifice se definește ca $\varepsilon = \dfrac{Q_{cedat}}{L}$. Gazul de lucru este aerul cu $\gamma = 1{,}4$, iar $\dfrac{p_1}{p_2} = 3$. Transformările 1—2 și 3—4 sînt adiabatice. Care ar fi randamentul aceluiași ciclu dacă ar fi mașină termică?

+ **2.96.** Să se calculeze randamentul ciclulu din figura 2.96 dacă se cunosc $\alpha = \dfrac{p_3}{p_2}$, $\beta = \dfrac{V_4}{V_1}$ și $T_1 = \delta T_2$, iar transformările 1—2 și 3—4 sînt adiabatice.

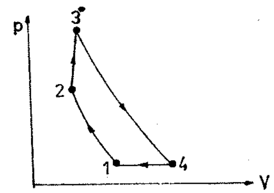

Fig. 2.96.

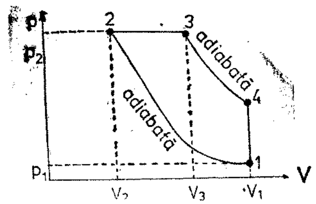

Fig. 2.97.

+ **2.97.** Să se calculeze randamentul motorului Diesel (fig. 2.97) în funcție de rapoartele de compresie $\varepsilon = \dfrac{V_1}{V_2} = 10$ și $\rho = \dfrac{V_3}{V_2} = 2$. Se știe că $\gamma = 1{,}4$.

• **2.98.** Un gaz ideal efectuează ciclul reprezentat în figura 2.98. a) Să se reprezinte grafic ciclul în coordonate p — V. b) Să se calculeze randamentul ciclului dacă se cunosc $\rho = \dfrac{V_3}{V_2}$ şi $\beta = \dfrac{p_2}{p_1}$. c) Să se calculeze randamentul ciclului dacă se cunosc $\beta = \dfrac{p_2}{p_1}$ şi $\delta = \dfrac{T_3}{T_2}$.

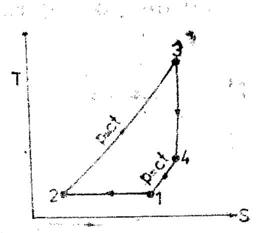

Fig. 2.98.

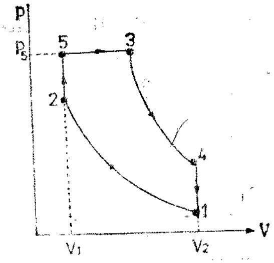

Fig. 2.99.

• **2.99.** Un gaz ideal efectuează ciclul din figura 2.99. Să se calculeze randamentul ciclului cunoscînd pe $\lambda = p_5/p_2$, $\rho = V_3/V_5$ şi $\varepsilon = V_1/V_2$. Să se compare rezultatul pentru $\lambda = 1$ cu cel al problemei 2.97 (ciclul Diesel) şi pentru $\rho = 1$ cu cel al problemei 2.103 (ciclul Otto). Transformările 1—2 şi 3—4 sînt adiabatice.

2.100. Să se determine randamentele următoarelor cicluri, ştiind că agentul termic este un gaz ideal cu valoarea lui $\gamma = \dfrac{C_p}{C_V}$ cunoscută : a) Un ciclu format din două izobare şi două adiabate dacă se cunoaşte raportul $b = \dfrac{p_{\max}}{p_{\min}}$, unde $p_{\max}$ şi $p_{\min}$ sînt presiunile maximă şi minimă din ciclu; b) Un ciclu format din două izocore şi două izoterme. Se cunosc temperaturile T_1 şi T_2 ale transformărilor izoterme şi raportul $a = \dfrac{V_{\max}}{V_{\min}}$, unde $V_{\max}$ şi $V_{\min}$ sînt volumele maxim şi minim ale ciclului; c) Un ciclu format dintr-o izotermă, o adiabată şi o izobară. Transformarea izotermă are loc la temperatura minimă din ciclu. Se cunoaşte raportul $b = \dfrac{p_{\max}}{p_{\min}}$.

2.101. Un gaz ideal biatomic se încălzeşte la volum constant astfel că presiunea sa creşte de 3 ori. Apoi gazul se destinde adiabatic pînă la presiunea iniţială şi în continuare se comprimă izobar pînă la volumul iniţial. Să se calculeze randamentul ciclului.

• **2.102.** Un kmol de gaz ideal biatomic efectuează ciclul din figura 2.102 format din două izocore şi două izobare. Se cunosc temperaturile $T_1 = 200$ K şi $T_3 = 800$ K. Să se calculeze : a) Lucrul efectuat de gaz în decursul unui ciclu dacă stările 2 şi 4 se află pe aceeaşi izotermă. b) Randamentul ciclului în condiţiile de la punctul a).

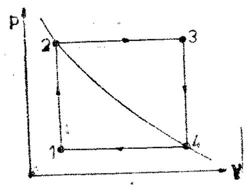

Fig. 2.102.

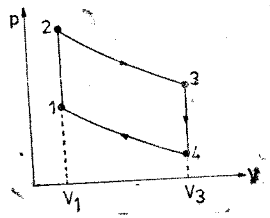

Fig. 2.103.

• **2.103.** Energia internă a unui gaz fotonic are expresia $U = aVT^4$, unde a este o constantă, iar coeficientul adiabatic al aceluiaşi gaz este $\gamma = \dfrac{4}{3}$. Un astfel de gaz efectuează ciclul din figura 2.103 unde transformările 2—3 şi 4—1 sînt adiabatice. Să se calculeze randamentul ciclului în funcţie de $\varepsilon = \dfrac{V_3}{V_1} = 8$.

• **2.104.** Un kmol de gaz ideal biatomic efectuează ciclul din figura 2.104. Pe ramurile BC şi DA căldura molară este $C = 2R$. Valorile V_A, α şi β sînt cunoscute. Să se calculeze : a) Lucrul mecanic efectuat într-un ciclu; b) Căldura absorbită în ciclu; c) Randamentul ciclului; d) Condiţia ce trebuie îndeplinită ca punctele B şi D să fie aşezate pe aceeaşi izotermă; e) Randamentul unui ciclu Carnot care ar funcţiona între temperaturile izotermelor ce trec prin C şi A. Să se arate că randamentul Carnot este mai mare decît cel calculat la punctul c).

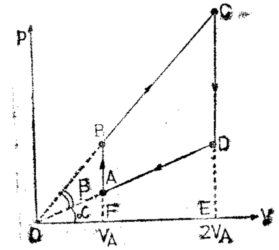

Fig. 2.104.

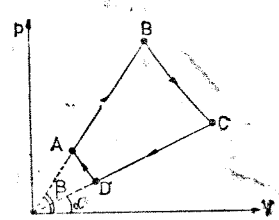

Fig. 2.105.

• **2.105.** Un gaz ideal biatomic efectuează ciclul din figura 2.105, unde transformările AD şi BC sînt izoterme. Se cunosc α, β şi $T_B = aT_A$, iar căldura molară în transformările AB şi CD este egală cu

16—c. 348

$2R$. a) Să se calculeze randamentul ciclului; b) Care este condiția ca punctele B și D să se afle pe aceeași adiabată.

+• **2.106.** Considerăm ciclul din figura 2.106 efectuat de un gaz ideal monoatomic. Să se calculeze randamentul ciclului și să se compare cu randamentul unui ciclu Carnot ce ar funcționa între izotermele ce trec prin B și A. Căldura molară pe transformarea BC este $C = R$. Se cunosc $p_B = ap_A$ și $V_C = bV_A$; caz particular $a = 3$, $b = 2$.

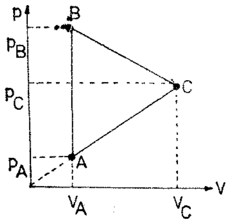

Fig. 2.106.

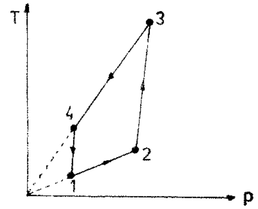

Fig. 2.107.

+ • **2.107.** Un gaz ideal biatomic parcurge un ciclu care în coordonate $T - p$ este reprezentat în figura 2.107. Știind că $p_2 = 2p_1$ și $T_4 = 2T_1$ să se calculeze randamentul ciclului.

2.108. Două corpuri identice cu masa $m = 10$ kg, căldura specifică $c = 400$ J/kg · K și temperaturile $t_a = 127°C$ și $t_b = 27°C$ sînt puse în contact. Să se calculeze: a) Energia maximă care poate fi transferată de sistem în exterior sub formă de lucru mecanic în absența altor rezervoare de căldură; b) Energia pe care nu o poate transfera sistemul în exterior sub formă de lucru mecanic.

2.109. Să se calculeze creșterea de entropie ΔS a unui kmol de gaz ideal biatomic în cursul încălzirii de la 0° la 500°C dacă transformarea se produce: a) la volum constant; b) la presiune constantă $\left(C_V = \frac{5}{2} R\right)$

2.110. Să se determine creșterea entropiei ΔS în decursul dilatării a 0,2 g de hidrogen de la volumul $V_1 = 1{,}5$ l la volumul $V_2 = 4{,}5$ l dacă transformarea are loc la: a) presiune constantă; b) temperatură constantă.

2.111. Un kmol de gaz perfect suferă o transformare politropă (pV^n = constant) între temperaturile $T_1 = 300$ K și $T_2 = 400$ K. Indicele politropei este $n = 3$, iar gazul este biatomic. Să se calculeze: a) variația entropiei ΔS a gazului; b) lucrul mecanic efectuat asupra gazului.

+ • **2.112.** Un kmol de gaz este încălzit la presiune constantă de la $t_1 = 17°C$ la $t_2 = 75°C$ și absoarbe o cantitate de căldură $Q = 1{,}2$ MJ. Să se calculeze: a) Valoarea coeficientului adiabatic $\gamma = C_p/C_V$; b) Creșterea energiei interne ΔU; c) lucrul mecanic; d) Creșterea entropiei gazului.

+ **2.113.** Două kg de oxigen ocupă un volum de 1,5 m³ la presiunea de 10^5 N/m². În decursul unei dilatări volumul gazului crește de 2,5 ori în timp ce presiunea scade de 3 ori. Să se calculeze: a) variația energiei interne ΔU; b) variația entropiei gazului ΔS. Pentru oxigen $\mu = 32$ kg/kmol.

2.114. Un vas cu volumul $V_1 = 1{,}6$ l conține $m_1 = 14$ mg azot și un altul cu volumul $V_2 = 3{,}4$ l conține $m_2 = 16$ mg oxigen. Gazele se află la aceeași temperatură. Cele două vase sînt puse în comunicație și gazele se amestecă. Să se calculeze: a) creșterea entropiei ΔS în această transformare; b) variația energiei interne în acest proces. Pentru azot $\mu_1 = 28$ kg/kmol și pentru oxigen $\mu_2 = 32$ kg/kmol.

+• **2.115.** O masă de azot $m = 14$ g suferă o destindere adiabatică în urma căreia presiunea gazului scade de 5 ori, urmată de o comprimare izotermă pînă la presiunea inițială. Temperatura inițială a azotului este $T_1 = 420$ K. a) Să se reprezinte grafic în coordonate $p - V$ aceste transformări. Să se calculeze: b) temperatura gazului T_2 la sfîrșitul transformării 1—2; c) căldura cedată de gaz; d) creșterea energiei interne a gazului ΔU; e) lucrul mecanic efectuat de gaz; f) creșterea entropiei gazului. Masa molară a azotului este $\mu = 28$ kg/kmol.

+ **2.116.** Un kmol de gaz biatomic aflat la temperatura $T_1 = 300$ K suferă o răcire izocoră astfel încît presiunea sa scade la jumătate. În decursul dilatării ulterioare, la presiune constantă, temperatura gazului în starea finală este egală cu cea inițială. a) Să se reprezinte transformările în coordonate $p - V$ și în $p - T$. Să se calculeze: b) căldura absorbită de gaz; c) lucrul mecanic efectuat de gaz; d) variația energiei interne a gazului; e) variația entropiei gazului.

2.117. Într-un recipient se află închis un volum $V = 2{,}5$ l hidrogen la temperatura $t_1 = 17°C$ și presiunea $p_1 = 1{,}5 \cdot 10^4$ N/m². Se răcește hidrogenul pînă la temperatura $t_2 = 0°C$. Să se calculeze: a) căldura cedată de gaz; b) creșterea energiei interne a gazului; c) creșterea entropiei gazului. Masa molară a hidrogenului este $\mu = 2$ kg/kmol.

2.118. În figura 2.118 sînt reprezentate două transformări suferite de un gaz ideal din starea 1 în starea 2. Să se arate că în cele două cazuri creşterea de entropie ΔS este aceeaşi.

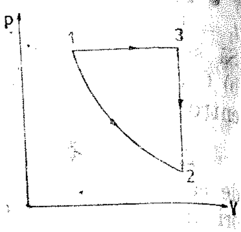

Fig. 2.118.

2.119. Un pendul matematic cu masa m şi lungimea l este deviat iniţial cu un unghi mic θ faţă de poziţia sa de echilibru. Să se calculeze creşterea de entropie a aerului înconjurător atunci cînd oscilaţiile pendulului s-au stins complet.

2.120. Un gaz pentru care $\frac{C_p}{C_V} = \frac{4}{3}$ se află la presiunea de $0{,}2 \cdot 10^6$ N/m² şi ocupă volumul de 3 dm³. Ca rezultat al încălzirii sale izobare volumul său creşte de 3 ori. Să se calculeze : a) căldura primită de gaz ; b) variaţia entropiei unui kmol de gaz.

2.121. O maşină termică foloseşte drept agent termic hidrogenul cu $\mu = 2$ kmol/kg. Pentru fiecare kW produs, maşina foloseşte $m = 0{,}36$ kg de cărbune, cu puterea calorică $q = 4 \cdot 10^7$ J/kg, într-o oră. Ciclul de transformări urmat de cei $\nu = 2$ moli de hidrogen este format din două izocore şi două izobare. În starea iniţială $V_1 = 49{,}86 \cdot 10^{-3}$ m³ şi $p_1 = 10^5$ N/m². Gazul trece printr-o transformare izocoră în starea cu presiunea $p_2 = 1{,}2\, p_1$, de unde trece printr-o transformare izobară în starea cu temperatura maximă. Randamentul ciclului este egal cu 50% din randamentul unui ciclu Carnot care ar folosi aceleaşi temperaturi maximă şi minimă. Să se calculeze : a) valorile temperaturilor în cele patru stări ; b) variaţia energiei interne pe ciclu ; c) lucrul mecanic în destinderea izobară ; d) variaţia entropiei pe ciclu.

2.122. Un kg apă aflat la temperatura de $t_1 = 20$°C este pus în contact termic cu o sursă de căldură (termostat) aflată la $t_0 = 80$°C. Să se calculeze : a) cu cît a variat entropia sistemului total (apă + sursa de căldură) după stabilirea echilibrului termic ; b) cu cît variază entropia sistemului total dacă apa este pusă mai întîi în contact cu o sursă la $t_2 = 50$°C şi apoi în contact cu cea de 80°C. Căldura specifică a apei $c = 4180$ J/kg · K ; c) în ce condiţii poate fi încălzită apa de la t_1 la t_0 fără variaţie de entropie.

2.123. O piesă metalică cu capacitatea calorică $C_1 = 250$ J/K şi temperatura $\theta_1 = 500$°C este scufundată într-o baie de ulei avînd capacitatea calorică $C_2 = 8360$ J/K şi temperatura $\theta = 20$°C. a) Să se arate că procesul de răcire al piesei metalice este ireversibil ; b) să se calculeze variaţia entropiei întregului sistem (baie + piesă).

2.3. Teoria cinetico-moleculară

• **2.124.** Densitatea unui amestec de heliu şi argon, aflat la presiunea $p = 1{,}52 \cdot 10^5$ N/m² şi temperatura $t = 27$°C, este egală cu $\rho = 2$ kg/m³. Să se calculeze numărul de atomi de heliu din unitatea de volum de amestec. Masa moleculei de heliu este $m_{He} = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ kg, iar a atomului de argon, $m_{Ar} = 54 \cdot 10^{-27}$ kg. Constanta lui Boltzmann este egală cu $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

• **2.125.** Un gaz aflat la presiunea $p = 80$ atm. şi temperatura $t = 91$°C are densitatea $\rho = 5{,}4$ kg/m³. Să se afle masa unei molecule m_0 de gaz. Numărul lui Loschmidt este $n_0 = 2{,}7 \cdot 10^{25}$ m⁻³.

• **2.126.** Agregatele moderne pentru obţinerea vidului permit realizarea unei presiuni de $p = 10^{-12}$ torr. Să se calculeze numărul de molecule de gaz care se află într-un volum $V = 1$ cm³ la această presiune şi la temperatura $t = 48$°C.

2.127. Un amestec de oxigen şi azot se află într-un balon cu volumul $V = 10$ l la temperatura $t = 27$°C. Presiunea parţială a oxigenului este $p_{O_2} = 5 \cdot 10^4$ N/m², şi în balon se găsesc 0,5 moli de azot. Să se calculeze : a) masa de oxigen din balon ; b) presiunea totală a amestecului ; c) vitezele pătratice medii (termice) ale moleculelor celor două gaze. Se cunosc : $\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol şi $\mu_{N_2} = 28$ kg/kmol.

• **2.128.** Într-un tub de descărcare în gaze aflat la temperatura $t = 15$°C concentraţia de molecule de aer este $n_0 = 3{,}35 \cdot 10^{23}$ m⁻³. Să se calculeze : a) presiunea aerului rarefiat ; b) viteza termică a moleculelor de aer. Se cunosc : $\mu_{aer} = 29$ kg/kmol ; $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K ; $N_A = 6{,}024 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹.

2.129. La temperatura de 0°C şi o presiune oarecare lungimea medie a drumului liber al moleculelor de oxigen este egală cu $9{,}5 \cdot 10^{-8}$ m. Cît devine numărul mediu de ciocniri pe secundă ale moleculelor de oxigen dacă recipientul este vidat pînă la a 0,01 parte din presiunea iniţială. Temperatura rămîne constantă.

2.130. Să se calculeze numărul limită al moleculelor de gaz care trebuie să se găsească într-un cm³ dintr-un recipient sferic cu diametrul de 15 cm pentru ca moleculele să nu se lovească una de alta. Diametrul moleculelor de gaz este egal cu $3 \cdot 10^{-8}$ m.

• **2.131.** Să se calculeze temperatura la care energia cinetică medie a mişcării de translaţie a moleculelor de oxigen este egală cu 1 eV (1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J).

2.132. Să se calculeze energia de agitație termică (energia internă) a 20 g oxigen la temperatura de 10°C. A cîta parte din această energie corespunde mișcării de translație și a cîta parte mișcării de rotație? ($\mu_{O_2} = 32$ kg/kmol).

2.133. Densitatea unui gaz aflat într-un recipient este egală cu $\rho = 6 \cdot 10^{-2}$ kg/m³, iar viteza termică a moleculelor, $v_t = 500$ m/s. Să se calculeze presiunea exercitată de gaz asupra pereților vasului.

2.134. Pentru a obține un vid bun într-un vas de sticlă pereții acestuia vor fi încălziți în timpul evacuării pentru a îndepărta gazul absorbit. Să se calculeze cu cît poate crește presiunea într-un vas sferic cu raza $r = 10$ cm, dacă moleculele absorbite trec în vas de pe pereți. Secțiunea transversală a unei molecule este $s = 10^{-15}$ cm², iar stratul este monomolecular. Temperatura este $t = 300$°C. Constanta lui Boltzmann, $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.

2.135. Presiunea unui gaz crește de $a = 4$ ori prin încălzire izocoră. Să se calculeze: a) raportul vitezelor termice ale moleculelor de gaz înainte și după încălzire; b) viteza termică a moleculelor după încălzire dacă temperatura inițială este $t_1 = 0$°C, iar gazul este aerul cu $\mu = 29$ kg/kmol.

2.136. Într-un vas se află azot la presiunea $p = 56 \cdot 10^3$ N/m², iar moleculele de azot au viteza termică $v_t = 600$ m/s. Să se calculeze: a) concentrația moleculelor de azot din vas; b) densitatea azotului din vas. Masa molară a azotului $\mu = 28$ kg/kmol, iar numărul lui Avogadro $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ kmol⁻¹.

2.137. Încălzind un gaz cu $\Delta T = 200$ K, viteza termică a moleculelor de gaz a crescut de la $v_{t_1} = 400$ m/s la $v_{t_2} = 576$ m/s. Să se calculeze masa molară a gazului.

2.138. O cantitate de heliu ($\mu = 4$ kg/kmol) are temperatura $t_1 = 27$°C presiunea $p_1 = 6 \cdot 10^6$ N/m². Gazul suferă o destindere adiabatică pînă la presiunea $p_2 = 3 \cdot 10^5$ N/m². Să se calculeze: a) temperatura t_2 a heliului după destinderea adiabatică; b) variația vitezei medii pătratice și a energiei cinetice medii a moleculelor heliului între starea inițială și finală; c) variația numărului de molecule din unitatea de volum între cele două stări.

2.139. Într-un balon se află azot la presiunea normală și temperatura $t_1 = 27$°C. Încălzind balonul pînă la $t_2 = 127$°C iese printr-o supapă o masă $m = 1$ g azot, pentru a menține constantă presiunea din interior. Să se calculeze: a) volumul balonului; b) coeficientul adiabatic γ al azotului știind că pentru încălzirea întregii mase inițiale de azot s-a consumat o căldură $Q = 415{,}5$ J; c) numărul de molecule N_2 de azot rămase în balon. Numărul lui Avogadro este $N_A = 6 \cdot 10^{26}$ molecule/kmol.

2.140. În doi cilindrii A și B cu diametre egale se pot deplasa liber pistoane cu mase neglijabile și cu o tijă comună. Tija este un tub scurt prevăzut cu un robinet care este închis inițial (figura 2.140). Cilindrul A împreună cu pistonul este izolat adiabatic, iar cilindrul B se găsește în contact cu un termostat ce are temperatura $t = 27$°C. Inițial pistonul cilindrului A este fixat și în cilindrul se găsește o masă $m = 32$ kg argon la o presiune mai mare decît presiunea atmosferică. În cilindrul B se află o cantitate de oxigen la presiunea atmosferică normală. Lăsat liber, pistonul cilindrului A se mișcă suficient de lent (cvasistatic) și la echilibru se constată că volumul gazului a crescut de 8 ori, iar în cilindrul B densitatea oxigenului a crescut de două ori. Știind că termostatului i-a fost cedată căldura $Q' = 747{,}9 \cdot 10^4$ J, se cere: a) Să se stabilească pe baza teoriei cinetice a gazului, studiind ciocnirile elastice ale moleculelor cu pistonul, că ecuația termică a procesului ce are loc în cilindrul A este $TV^{2/3} =$ const. b) Să se determine parametrii p, V, T ai argonului în stările inițială și finală; c) deschizînd robinetul care separă cei doi cilindrii să se calculeze presiunea finală a amestecului de gaze.

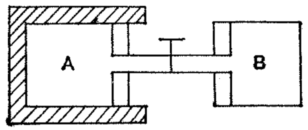

Fig. 2.140.

2.4. Dilatarea termică

2.141. Roata unei locomotive are raza $r_0 = 1$ m la $t_0 = 0$°C. Să se calculeze diferența dintre numărul de rotații pe care le efectuează roata vara la $t_1 = 25$°C și iarna la $t_2 = -25$°C, pe distanța $L = 1000$ m. Se cunoaște $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grad⁻¹.

2.142. Lungimea unui pod de fier este $l = 500$ m la temperatura $t = 20$°C. Cîte grade va avea unghiul la centrul rolelor, format de punctele de sprijin A și B atunci cînd temperatura mediului exterior variază între $t_1 = +35$°C (vara) și $t_2 = -25$°C (iarna). Rolele sînt cilindrice, avînd diametrul de $d = 30$ cm, iar $\alpha_{Fe} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grad⁻¹, (figura 2.142). Se neglijează dilatarea rolelor.

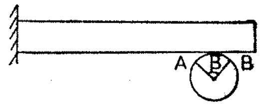

Fig. 2.142.

2.143. Să se determine lungimile a două rigle una din fier și alta din cupru la temperatura $t = 0$°C știind că diferența între lungimile lor are aceeași valoarea absolută $l = 2$ cm la temperaturile $t_1 = 50$°C și $t_2 = 450$°C. Coeficienții de dilatare liniară sînt $\alpha_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹ și $\alpha_{Cu} = 17 \cdot 10^{-6}$ grad⁻¹.

2.144. O bară rigidă de masă neglijabilă este suspendată prin trei fire de lungimi și secțiuni egale de capetele și mijlocul ei (fig. 2.144). La mijlocul distanței dintre primele două fire se atîrnă o bară de masă m. Știind că între modulele de elasticitate ale firelor există relația

$E_1 = E_2 = \frac{E_3}{2}$, să se stabilească relația de

legătură dintre coeficienții de dilatare ai firelor α_1, α_2 și α_3 pentru ca în urma vari-ației temperaturii mediului înconjurător firele să readucă bara în poziția orizon-tală inițială, cînd firele erau nealungite.

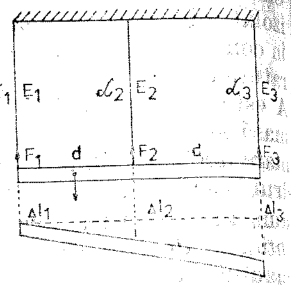

Fig. 2.144.

2.145. Două bare de secțiuni egale S și din materiale diferite (E_1, α_1, E_2, α_2) sînt așezate una în prelungirea celeilalte între doi pereți verticali nedeformabili. Dacă lungimile inițiale ale barelor sînt l_1 și l_2, să se determine forța de apăsare dintre cele două bare după încălzirea lor cu $\Delta\theta$. În starea inițială barele sînt nedeformate.

+ • **2.146.** O bară omogenă cu masa $M = 1{,}5$ kg, căldura specifică $c = 418$ J/kg·K, lungimea $l = 0{,}5$ m, secțiunea $S = 5 \cdot 10^{-4}$ m^2, mo-dulul de elasticitate $E = 4 \cdot 10^5$N/m^2 și coeficientul de dilatare liniară $\alpha = 6 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1} se fixează nedeformată între un perete vertical fix și un corp de masă $m = 0{,}5$ kg. Între corp și suprafața orizontală coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}4$. Să se calculeze : a) la ce variație de temperatură a barei începe corpul să se miște ; b) ce variație de temperatură a barei produce o deplasare a corpului cu $\Delta l = 0{,}2$ cm și ce energie s-a consumat pînă în acest punct. Se neglijează pierderile de căldură.

+ • **2.147.** O bară aflată la temperatura $t_1 = -20$°C are lungimea $l_1 = 50$ cm, secțiunea $S = 10$ cm^2, densitatea $\rho_0 = 7800$ kg/m^3 iar căldura specifică $c = 1{,}2 \cdot 10^3$ J/kg·K și absoarbe căldura $Q = 2 \cdot 10^5$J. Să se calculeze : a) masa barei ; b) temperatura t la care ajunge bara prin absorbția căldurii Q ; c) alungirea Δl a barei prin încălzire ; d) forța care trebuie să acționeze longitudinal asupra barei pentru a-i menține lungimea inițială ; e) lucrul mecanic L efectuat de forțele elastice care acționînd asupra barei la temperatura t_1, pro-duce alungirea Δl. Se dau : $E = 1{,}2 \cdot 10^{11}$ N/m^2 ; $\alpha = 1{,}9 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}.

2.148. O bară de oțel cu secțiunea $S = 24$ cm^2 absoarbe prin încălzire 22 MJ. Se cere să se calculeze : a) alungirea barei ; b) forța care trebuie aplicată barei pentru a se obține aceeași alungire ; c) masa de apă m_1 la temperatura $t_0 = 20$°C care poate fi adusă în stare

de vapori prin absorbirea aceleiași cantități de căldură ; d) Canti-tatea de petrol necesară pentru a se obține 22 MJ de la un încălzitor cu randamentul de 30%. Se cunosc $\rho_{Fe} = 7{,}8 \cdot 10^3$kg/m^3, $c_{Fe} = 0{,}46$ kJ/kg·K, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}, $E = 3 \cdot 10^{10}$ N/m^2, $q_{petrol} = 313 \cdot 10^3$ J/kg, $\lambda_V = 225 \cdot 10^4$J/kg, $l_0 = 1$m.

2.149. Un ceas cu pendul metalic are o întîrziere zilnică de $\tau_1 = 5$s la temperatura $t_1 = 15$°C și $\tau_2 = 10$ s la temperatura $t_2 = 30$°C. Să se determine coeficientul de dilatare a metalului din care este confecționat pendulul.

2.150. Diametrul unei bile la temperatura $t = 18$°C este $d = 1$ cm. Pentru călirea acesteia se folosește procedeul încălzirii și răcirii succesive între temperaturile $t_1 = 1000$°C și $t_2 = 4$°C. Să se calculeze variația volumului unei bile între cele două temperaturi, dacă $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ ·grad^{-1}.

+ • **2.151.** O sferă de fier cu diametrul $d_1 = 10$ cm la temperatura $t_1 = 400$°C se introduce într-un vas ce conține $m_a = 2$ kg apă la temperatura $t_2 = 16$°C. În apa din vas se găsește o bară de cupru care la această temperatură are lungimea $l_2 = 15$ cm și secțiunea $S_2 = 0{,}02$ cm^2. Neglijînd capacitatea calorică a vasului și considerînd pentru fier $\rho_{10} = 7800$ kg/m^3; $c_1 = 459{,}5$ J/kg·K, $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6}$ grad^{-1}, pentru cupru : $\rho_{20} = 8900$ kg/m^3; $c_2 = 376{,}8$ J/kg, $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6}$grad^{-1}, iar pentru apă $\alpha = 18 \cdot 10^{-5}$grad^{-1}; $c_3 = 4185$ J/kg·grad, se cere : a) temperatura la echilibru termic ; b) volumul sferei, volumul apei, lungimea barei, pentru temperatura de echilibru.

2.152. Într-un recipient cu volumul $V_1 = 40$ l se află com-primat hidrogen la presiunea $p_1 = 2 \cdot 10^6$ N/m^2 și temperatura $t_1 = 27$°C. Recipientul alimentează cu hidrogen o flacără care încăl-zește o bilă de metal cu masa $M = 500$ grame pînă ce volumul său crește cu $\Delta V/V_0 = 10$%. Să se calculeze : a) masa inițială a hidro-genului din recipient ; b) cantitatea de hidrogen Δm consumată de flacără dacă puterea calorică a acesteia este $q = 5 \cdot 10^5$ kJ/kg, iar randamentul încălzirii $\eta = 80$% ; c) presiunea din recipient după ce s-au consumat cele Δm grame de hidrogen. Se cunosc : $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$K^{-1}; $c_b = 497$ J/kg·K ; $\mu_H = 2$ kg/kmol.

+ • **2.153.** O bucată de fier se aruncă de la înălțimea $H = 1000$ m în jos cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Admițînd că fierul păstrează în el $\eta = 70$% din căldura rezultată prin transformarea energiei mecanice și că după ciocnirea cu solul se mai ridică la înălțimea $h' = 1$ m, să se calculeze : a) variația $\Delta\theta$ a temperaturii corpului ; b) variația relativă $\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)$ a volumului corpului. Se cunosc : $c_0 = 459{,}8$ J/kg·K ; $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ grad^{-1}.

2.154. Într-un vas se găsește un volum V_1 dintr-un lichid la temperatura t_1. În lichid se introduce un corp cu un volum V_2 la temperatura $t_2 < t_1$. a) Să se calculeze temperatura finală a sistemului cunoscînd căldurile specifice c_1 și c_2, coeficienții de dilatație α_1 și α_2 și densitățile la 0°C pentru lichid și corp ρ_{01} și ρ_{02}; b) Dacă S este secțiunea vasului, să se calculeze variația de nivel a lichidului din vas între starea inițială (înainte de introducerea corpului) și starea finală a sistemului. Se neglijează capacitatea calorică a vasului și dilatația lui.

2.155. Se dau două sfere identice (din același material, aceleași dimensiuni, de aceeași masă) aflate la aceeași temperatură. Una din sfere este suspendată de un fir, iar cealaltă este așezată pe un plan orizontal. Celor două sfere li se transmit cantități egale de căldură. Procesul de încălzire se produce suficient de rapid astfel încît schimbul de căldură cu mediul ambiant este neglijabil. Cum vor fi temperaturile celor două sfere după încălzire? Să se justifice răspunsul.

2.156. Un cub de siliciu, cu dilatația neglijabilă, este suspendat de talerul unei balanțe echilibrată cu o tară. Se cufundă cubul în apă la 0°C și se restabilește echilibrul, așezînd $m_1 = 125$ g pe talerul de care este suspendat cubul. Cufundînd cubul în alcool la 0°C echilibrul se restabilește cu $m_2 = 100$ g. Cufundînd cubul în alcool la 30°C echilibrul se restabilește cu $m_3 = 96{,}8$ g. Se cere : a) Să se determine volumul cubului și muchia sa; b) Să se determine densitatea alcoolului și coeficientul său de dilatație reală; c) Se înlocuiește cubul de siliciu printr-un cub de zinc avînd aceeași muchie la 0°C. După echilibrare se cufundă cubul de zinc în alcool la 30°C. Echilibrul se restabilește cu 97,06 g. Să se determine coeficientul de dilatație al zincului și lungimea muchiei cubului la 30°C; d) Diferența dintre variațiile energiilor interne ale cuburilor de zinc și de siliciu prin încălzire de la 0°C la 30°C fiind de 1968,75 J, să se afle căldura specifică a siliciului. Se dau : $c_{Zn} = 375$ J·kg^{-1}·K^{-1}; $\rho_{Si} = 2500$ kg·m^{-3}, $\rho_{Zn} = 7000$ kg·m^{-3}; $\rho_{apă} = 10^3$ kg·m^{-3}.

2.157. Într-un pahar se află un volum $V_1 = 300$ cm^3 de toluen la temperatura de $t = 0$°C, iar în alt pahar un volum $V_2 = 110$ cm^3 de toluen la temperatura de $t_2 = 150$°C. Neglijînd pierderile de căldură să se determine volumul total al toluenului după amestecarea celor două lichide ($\gamma = 0{,}001$ K^{-1}).

2.158. Un cilindru de sticlă poate conține $m_0 = 0{,}1$ kg de mercur la temperatura $t_0 = 0$°C. La $t_1 = 20$°C cilindrul poate conține $m_1 = 0{,}0997$ kg de mercur. În ambele cazuri temperatura mercurului este aceeași cu cea a cilindrului. Cunoscînd coeficientul de dilatare în volum al mercurului $\gamma_1 = 18\cdot10^{-5}$ K^{-1} să se determine coeficientul de dilatare liniară α_{st} al sticlei.

2.159. Pentru a înlătura efectul dilatării în volum a unui vas în timpul încălzirii, o porțiune inferioară a vasului este umplută cu un amestec al cărui coeficient de dilatare în volum este $\gamma_2 = 8\cdot10^{-5}$K^{-1}. Să se calculeze ce fracțiune din volumul vasului trebuie umplut cu amestec pentru a compensa complet dilatarea vasului. Coeficientul de dilatare al vasului este $\gamma_1 = 3\cdot10^{-5}$K^{-1}.

2.160. Două tuburi identice de sticlă de formă cilindrică, gradate, se umplu, unul cu mercur, celălalt cu un lichid al cărui coeficient de dilatare este necunoscut, pînă la diviziunea 50. Ambele tuburi se află la temperatura $t_1 = 10$°C. Se ridică apoi temperatura celor două tuburi pînă la $t_2 = 90$°C, constatîndu-se că în urma dilatării, mercurul a urcat cu 0,3 diviziuni mai mult decît lichidul necunoscut. Cunoscînd coeficienții de dilatație $\gamma_{Hg} = 1{,}8\cdot10^{-4}$grad^{-1} și $\gamma_s = 2{,}7\cdot10^{-5}$ grad^{-1} se cere să se determine coeficientul de dilatație γ_l al lichidului necunoscut. Se neglijează capilaritatea.

2.161. Un vas de sticlă plin cu mercur la 0°C conține $m_1 = 625$ g mercur. Prin încălzirea vasului, curge din el masa $m_2 = 10$ g de mercur. Să se calculeze temperatura la care a fost încălzit vasul știind că

$$\gamma_{Hg} = \frac{1}{5550}\ \text{K}^{-1},\quad \gamma_{sticlă} = \frac{1}{86100}\ \text{K}^{-1}.$$

2.162. Pentru determinarea coeficientului de dilatare al petrolului se folosește următoarea experiență : se ia o sferă de sticlă și se cîntărește în petrol la temperaturi diferite. La temperatura $t_1 = 15$°C, masa de petrol dislocuită de sferă este $m_1 = 90$ g, iar la $t_2 = 85$°C se obține $m_2 = 84$ g. Cunoscînd coeficientul de dilatare în volum al sticlei, $\gamma_s = 2{,}4\cdot10^{-5}$ grad^{-1}, să se calculeze coeficientul de dilatare în volum al petrolului γ_p.

2.163. Să se calculeze coeficientul de dilatare cubică a petrolului știind că la $t_0 = 0$°C un volum de petrol cîntărește $m_0 = 98$ g iar la temperatura $t_1 = 60$°C, masa aceluiași volum este $m_1 = 92{,}45$ g.

2.164. O bucată de metal al cărui coeficient de dilatare liniară este α, este scufundat în mercur. La 0°C forța arhimedică este F, iar la temperatura t ea are valoarea F'. Să se calculeze valoarea coeficientului de dilatare a mercurului dacă $\alpha = 10^{-5}$K^{-1}, $t = 25$°C, $F = 1000$ N și $F' = 1003{,}74$ N.

2.5. Tensiunea superficială

• **2.165.** Un tub capilar cu diametrul interior $d = 0{,}6$ mm se introduce în apă ($\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m; $\rho = 10^3$ kg/m^3). Să se determine: a) Lungimea coloanei de apă din tub cînd acesta se introduce vertical; b) Lungimea coloanei de apă, în cazul cînd tubul face un unghi $\alpha = 13°$ cu suprafața apei.

• **2.166.** Un tub capilar de rază r este introdus într-un lichid cu coeficientul de tensiune superficială σ și densitatea ρ. a) Să se determine înălțimea h_0 pînă la care se ridică lichidul în tubul capilar; b) Să se calculeze lucrul efectuat de tensiunea superficială pentru ridicarea lichidului în capilar și să se compare cu energia potențială. Să se explice diferența obținută.

• **2.167.** Un cadru dreptunghiular de sîrmă are o latură mobilă de lungime $l = 6$ cm și este acoperit cu o soluție de apă și săpun (fig. 2.167). Coeficientul la tensiune superficială a peliculei de apă cu săpun este $\sigma = 4 \cdot 10^{-2}$ N/m. Se cere să se determine: a) Forța cu care se poate trage de mijlocul laturii mobile astfel încît aceasta să rămînă în echilibru; b) Știind că latura mobilă se deplasează pe distanța $d = 2$ cm să se calculeze lucrul mecanic efectuat și să se explice în ce se transformă acest lucru.

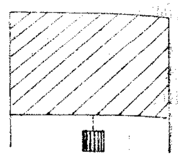

Fig. 2.167.

2.168. Tensiunea superficială a glicerinei se determină prin metoda picăturilor. Se lasă să se scurgă pe rînd dintr-o pipetă același volum V de apă și glicerină. Apa scursă a format $n_a = 89$ picături iar glicerina $n_g = 126$ picături. Cunoscînd $\sigma_a = 73{,}5 \cdot 10^{-3}$N/m, $\rho_a = 10^3$ kg/m^3, $\rho_g = 1260$ kg/m^3, să se calculeze coeficientul tensiunii superficiale a glicerinei σ_g.

• **2.169.** De pe fundul unui lac ies bule de gaze cu diametrul $d_0 = 1$ mm. Cînd ajung la suprafața apei diametrul bulelor de gaze devine $d_1 = 1{,}1\ d_0$. Să se calculeze adîncimea lacului știind că tensiunea superficială a apei este $\sigma = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m, iar presiunea atmosferică $p_0 = 10^5$ N/m^2. Temperatura rămîne neschimbată.

• **2.170.** Într-un corp de pompă se află o bulă de săpun de diametru $d_1 = 3$ cm. Temperatura și presiunea inițială în corpul de pompă sînt $t_1 = 27°$C, $p_0 = 40$ N. Efectuînd o transformare izobară, gazul din cilindru se răcește pînă la $t_2 = 7°$C, cînd diametrul bulei devine $d_2 = 0{,}96\ d_1$. Cunoscînd tensiunea superficială a apei cu săpun la t_1, $\sigma_1 = 0{,}04$ N/m, să se calculeze valoarea ei σ_2 la temperatura t_2.

2.171. Să se calculeze energia eliberată la contopirea picăturilor de glicerină de rază $r = 5 \cdot 10^{-4}$ mm într-o picătură mare de rază $R = 5$ mm. Se cunoaște tensiunea superficială a glicerinei $\sigma_g = 65 \cdot 10^{-3}$ N/m.

2.172. Să se determine variația ΔE a energiei libere a suprafeței unei mici picături, dacă în cursul unei transformări izoterme volumul picăturii se schimbă de la $V_1 = 10$ cm^3 la $V_2 = 2\ V_1$. Coeficientul de tensiune superficială al lichidului este $\sigma = 40 \cdot 10^{-3}$ N/m.

2.173. Două picături de mercur cu raza $r = 1$ mm fiecare se unesc într-o picătură cu raza R. a) Să se determine raza R a picăturii mari. b) Să se determine diferența de temperatură Δt dintre temperaturile picăturilor mici și a celei mari. Se cunosc pentru mercur: $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3, $c = 138$ J/kg·K și $\sigma = 0{,}48$ N/m.

• **2.174.** Alcoolul curge picătură cu picătură dintr-un vas printr-un tub vertical, care are diametrul interior $d = 2$ mm. Să se determine timpul în care vor curge $M = 10$ grame de alcool, dacă intervalul de timp dintre două picături consecutive este de 1 secundă. Se presupune că diametrul picăturii în momentul desprinderii este egal cu diametrul intern al tubului. $\sigma = 22 \cdot 10^{-3}$ N/m.

2.175. Raza interioară a unei ramuri a unui tub în formă de U închis la ambele capete, este $r_1 = 1$ mm și raza celeilalte ramuri este $r_2 = 2$ mm. În tub se toarnă mercur ($\sigma = 0{,}48$ N/m). Dacă se leagă una din ramuri la o pompă de vid, mercurul din cele două ramuri poate fi adus la același nivel. Să se stabilească ramura ce trebuie conectată la pompa de vid pentru a se aduce mercurul la același nivel și să se determine în acest caz diferența de presiune a aerului din cele două ramuri.

2.176. Tensiunea superficială a unui lichid poate fi determinată dacă se cunoaște presiunea necesară formării unei bule de aer la capătul unui tub capilar introdus în lichidul respectiv. Să se calculeze tensiunea superficială dacă raza capilarului este $r = 1$ mm și presiunea exercitată asupra lichidului din capilar pentru formarea bulei este $p_0 + \Delta p$, unde p_0 este presiunea atmosferică, iar $\Delta p = 14$ mm coloană de apă. Capătul capilarului introdus în lichid se află în apropierea suprafeței (fig. 2.176).

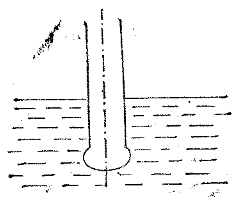

Fig. 2.176.

2.177. Un tub capilar din sticlă, cu un diametru intern de 0,5 mm este introdus în apă. Capătul superior al tubului se află la $h = 2$ cm deasupra suprafeței apei. a) Să se determine forma meniscului; b) Să se calculeze raza de curbură a meniscului ($\sigma_{apă} = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m; $\rho_{apă} = 10^3$ kg/m^3).

2.178. Un balon de săpun cu raza r este plasat pe un altul cu raza R (fig. 2.178). a) Să se determine forma stratului de săpun ce separă cele două baloane; b) Să se calculeze unghiurile formate între straturi în punctul de contact A.

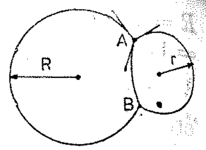

Fig. 2.178.

• **2.179.** Un tub capilar deschis la ambele capete, cu diametrul intern $d=3$ mm este introdus cu un capăt într-un vas cu mercur. Diferența între nivelele mercurului din vas și din capilar este $\Delta h = 3{,}7$ mm. Să se determine raza meniscului mercurului din tubul capilar ($\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ kg/m^3; $\sigma = 0{,}48$ N/m).

+ • **2.180.** Un areometru este format dintr-o tijă gradată fixată la partea superioară a unui plutitor de volum V ce se termină în partea inferioară cu o sferă (fig. 2.180). Introdus în lichid el se scufundă pînă la o anumită gradație. Considerăm că areometrul plutește în apă (unghiul de racordare fiind nul). Cum se va schimba adîncimea de scufundare a areometrului, dacă pe suprafața apei se pun cîteva picături de alcool. Pentru apă $\sigma_1 = 73 \cdot 10^{-3}$ N/m, iar pentru alcool $\sigma_2 = 22 \cdot 10^{-3}$ N/m și $r = 4{,}25$ mm.

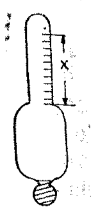

Fig. 2.180.

2.181. Un tub capilar este introdus cu un capăt într-un vas cu un lichid de densitate ρ, a cărui presiune de vapori poate fi neglijată. Vasul și tubul sînt introduse sub un clopot de sticlă în interiorul căruia se poate face vid. Să se determine presiunea în tubul capilar la înălțimea h deasupra nivelului lichidului din vas.

2.182. Un tub capilar deschis la ambele capete conține o picătură de apă. Cînd tubul este în poziție verticală picătura formează o coloană cu lungimea de: (a) 2 cm, (b) 4 cm, (c) 2,98 cm. Raza tubului capilar este $r=0{,}5$ mm. Să se determine razele de curbură ale meniscurilor superior și inferior în fiecare caz. Se consideră unghiul de racordare $\theta = 0$.

2.183. Două lame paralele introduse în apă ($\rho = 10^3$ kg/m^3) sînt depărtate între ele cu distanța $d = 3{,}65$ cm. Să se determine coeficientul de tensiune superficială știind că lichidul se ridică între cele două lame la o înălțime $h = 2$ cm, iar unghiul de racordare este $\theta = 60°$ (fig. 2.183).

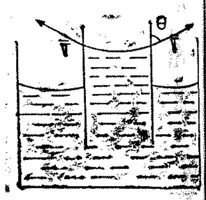

Fig. 2.183.

2.184. Să se calculeze înălțimea la care se ridică un lichid de densitate ρ și coeficient de tensiune superficială σ, între două plăci plan paralele situate la o distanță d foarte mică.

2.185. Într-un lichid cu coeficientul de tensiune superficială σ și densitate ρ se introduc două plăci plane care fac între ele un unghi foarte mic α. Să se stabilească forma suprafeței lichidului în spațiul dintre cele două plăci. Unghiul de racordare este $\theta = 0$.

2.6. Transformări de fază

+• **2.186.** O masă de apă $m_1 = 1$ kg se încălzește de la temperatura $t_0 = 20°C$ la temperatura $t = 100°C$ la presiune normală astfel încît $m_2 = 180$ g de apă se vaporizează. Să se calculeze: a) Căldura absorbită pentru încălzire; b) Volumul ocupat de vaporii de apă; c) Numărul moleculelor de gaz din unitatea de volum; d) Densitatea vaporilor; e) Impulsul mediu al unei molecule de apă aflată în stare de vapori. Se cunosc: căldura specifică a apei, $c_a = 4185$ J/kg·K și căldura latentă de vaporizare a apei, $\lambda_v = 2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg, $\mu_{apă} = 18$ kg/mol.

2.187. Într-un vas închis de volum $V = 10$ l se găsește aer uscat în condiții normale. În vas se introduce o masă $m = 3$ g de apă, după care vasul este încălzit pînă la 100°C. Considerînd dilatarea termică neglijabilă să se determine care va fi presiunea în vas după încălzire.

+ **2.188.** Un corp de pompă, de volum inițial $V_1 = 33$ dm^3, conține la temperatura $t_1 = -5°C$ o cantitate de gheață $m = 1{,}8$ g și azot la presiunea $p = 10^5$ N/m^2. Amestecul este încălzit izobar la temperatura $t_2 = 100°C$, astfel încît întreaga cantitate de gheață este transformată în vapori nesaturați. Să se calculeze: a) cantitatea de căldură Q necesară procesului; b) volumul final al amestecului (azot + vapori saturați); c) lucrul mecanic L efectuat la dilatarea izobară a amestecului; d) cu cît trebuie redus volumul la $p = 10^5$ N/m^2 și $t_2 = 100°C$ pentru ca jumătate din vaporii de apă să se condenseze. Se cunosc: $c_g = 2038$ J/kg·K, $c_a = 4185$ J/kg·K, $c_N = 1046{,}25$ J/kg·K, $\lambda_g = 3{,}32 \cdot 10^5$ J/kg și $\lambda_v = 2{,}22 \cdot 10^6$ J/kg, $\mu_a = 18$ kg/kmol; $\mu_N = 28$ kg/kmol.

+ • **2.189.** Un vas conține $m_1 = 500$ grame apă la temperatura $t_1 = 50°C$ și $m_2 = 20$ grame gheață la $t_2 = -10°C$. Să se calculeze: a) temperatura finală a amestecului; b) căldura necesară pentru a transforma toată cantitatea de apă ($m_1 + m_2$) în vapori la temperatura $\theta_3 = 100°C$ și $p = 10^5$ N/m^2; c) Cantitatea de combustibil consumat pentru acest lucru de un arzător ce are randamentul $\eta = 40\%$, dacă $q = 7500$ kJ/kg; d) Volumul ocupat de vaporii de

apă după ce au suferit o destindere izotermă încît presiunea lor scade de la $p_1 = 10^5$ N/m² la $p_2 = 10^4$ N/m²; e) Variația entropiei pînă la stabilirea echilibrului termic.

2.190. Se amestecă $m_1 = 5$ kg apă la $t_1 = +5$°C cu $m_2 = 10$ kg gheață la temperatura $t_2 = -15$°C. Ce se obține la echilibrul termic (apă, gheață, amestec)? $c_a = 4180$ J/kg·K; $c_g = 2100$ J/kg·K; $\lambda_g = 334$ kJ/kg.

2.191. Într-un cilindru cu piston de masă neglijabilă și secțiunea $S = 1000$ cm² se află apă avînd masa $m_1 = 1$ kg la temperatura $t_1 = 0$°C. În apă s-a introdus o bucată de fier cu masa $m_2 = 1$ kg și căldura specifică $c_2 = 500$ J/kg·K încălzită la temperatura $t_2 = 1100$°C. Presiunea atmosferică fiind normală (10^5N/m²) și neglijînd capacitatea calorică a cilindrului precum și schimbul de căldură cu exteriorul, să se afle: a) masa apei care se evaporă; b) înălțimea h la care se va ridica pistonul.

2.192. Într-un recipient în care se află $m_a = 10$ kg apă este introdus un vas cilindric cu pereții perfect conductori (fig. 2.192). În vas se află un piston cu masa $m = 5$ kg și suprafața $S = 4{,}9$ cm² egală cu suprafața vasului. În vas se află $\nu = 0{,}01$ moli de aer. Inițial starea de echilibru termodinamic se realizează la temperatura $\theta_0 = 27$°C. Apa din recipient este încălzită cu o serpentină parcursă de un agent termic lichid cu căldura specifică $c = 1000$ J/kg·K, avînd la intrare temperatura $\theta_1 = 200$°C, iar la ieșire $\theta_2 = 150$°C. Serpentina este parcursă într-o secundă de o masă de agent termic $D = 0{,}1$ kg. Considerînd că recipientul este izolat termic, iar apa și aerul au temperaturi egale în fiecare moment, se cere: a) înălțimea h_0 a pistonului de la fundul vasului în stare inițială; b) să se calculeze dependența de timp a distanței h dintre piston și fundul vasului din momentul începerii încălzirii pînă la momentul $t_1 = 20$ minute și să se reprezinte grafic $h = h(t)$; c) să se afle masa de vapori m_v ce părăsesc recipientul, după ce a fost atinsă temperatura de fierbere a apei din recipient $\left(C_v = \frac{5}{2} R\right)$. Capacitățile calorice ale pistonului și vasului sînt neglijabile.

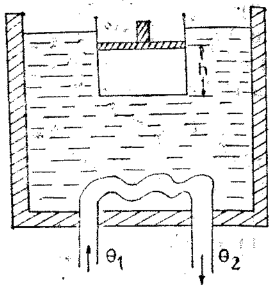

Fig. 2.192.

2.193. Aerul unei camere cu volumul $V = 24$ m³ se încălzește cu ajutorul unui radiator de calorifer cu vapori de apă saturați. Apa provenită din condensarea vaporilor părăsește radiatorul la temperatura $t_2 = 80$°C. Randamentul caloriferului este $\eta = 60\%$ iar temperatura aerului $\theta = -3$°C. Să se calculeze: a) cantitatea de vapori de apă (m_v) necesară pentru a ridica temperatura camerei cu $\Delta\theta = 25$°C, neglijînd pierderile de căldură prin pereții camerei; b) debitul de masă (D_m) al vaporilor de apă care trebuie să intre în radiator pentru a menține temperatura camerei constantă, dacă pierderile de căldură prin pereții camerei în unitatea de timp sînt: $P = 2300$ W; c) viteza medie pătratică a unei molecule din vaporii de apă în condițiile de la intrarea în radiator și numărul moleculelor aflate în masa de vapori (m_v) de la punctul 1 al problemei. Se cunosc: $N_A = 6\cdot10^{26}$ molecule/kmol, $\mu = 28{,}9$ kg/kmol, $\lambda_v = 2{,}2\cdot10^6$ J/kg; $c_a = 4185$ J/kg·K.

2.194. Un vas de capacitate calorică $C = 120$ J/kg·K conține $V = 10$ l apă la temperatura inițială $t_1 = 15$°C. Vasul este încălzit cu ajutorul unui arzător cu gaz ce are randamentul $\eta = 40\%$ și debitul $D_m = 5$ g/min, cu puterea calorică $q = 5\cdot10^7$ J/kg. Să se calculeze: a) după cît timp începe să fiarbă apa; b) debitul de masă de formare a vaporilor în timpul fierberii; c) vaporii formați se trimit într-un calorimetru de capacitate calorică neglijabilă, ce conține $m = 10$ kg gheață la temperatura $t_2 = -20$°C. După cît timp temperatura amestecului devine $t_3 = 0$°C, toată gheața fiind topită; d) după cît timp temperatura va fi $\theta = 10$°C și care este viteza de creștere a temperaturii $\left(v = \frac{\Delta\theta}{\Delta\tau}\right)$? ($c_g = 2100$J/kg·K).

2.195. Un recipient cu $V_1 = 10$ l conține gaz metan ($\mu = 16$ kg/kmol) la temperatura $t_1 = 27$°C și presiunea $p_1 = 9\cdot10^5$ N/m². Să se calculeze: a) densitatea metanului din recipient; b) în cît timp un motor termic cu randamentul $\eta = 25\%$ și puterea $P = 2$ kW ar consuma metan din recipient pînă ce presiunea finală devine $p_2 = 10^5$ N/m²; c) ce cantitate de apă cu temperatura $\theta_1 = 20$°C se poate transforma în vapori dacă se consumă aceeași cantitate de gaz metan ca la punctul b) al problemei. Se cunosc $q = 8560$ kJ/m³ în condiții normale; $R = 8310$ J/kmol·K.

2.196. O cantitate $m = 200$ g gheață cu temperatura $t_1 = -20$°C se încălzește pînă se transformă în vapori de apă la temperatura $t_3 = 100$°C, la presiune normală. Apoi vaporii suferă o transformare izobară de la t_3 la $t_4 = 120$°C. Să se calculeze: a) căldura necesară pentru desfășurarea acestui proces; b) volumul ocupat de vaporii de apă la temperatura t_4; c) variația totală a entropiei. Se cunosc $\mu = 18$ kg/kmol, $C_p = \frac{7}{2} R$, $c_g = 2100$ J/kg·K; $\lambda_g = 334$ kJ/kg; $\lambda_v = 2{,}25\cdot10^6$ J/kg.

✝**2.197.** Într-un vas în care se află $m_1 = 2$ kg apă la $t_0 = 0$°C se introduc $m_2 = 0{,}1$ kg eter la temperatura $t_2 = 20$°C. Ce se va afla

n vas după restabilirea echilibrului termic? $c_{eter} = 2350$ J/kg · K; $\lambda_{eter\ la\ 0°C} = 376830$ J/kg; $\lambda_g = 334$ kJ/kg.

2.198. Într-un vas care conține $m_1 = 20$ kg apă și $m_2 = 1$ kg gheață se află un corp de pompă ce conține azot cu volumul inițial $V_0 = 22{,}4$ dm³ și presiunea $p_0 = 1$ atm. Întregul ansamblu se găsește n starea de echilibru termic la $t_0 = 0°C$. În vasul cu apă se introduce cantitate x de vapori de apă aflați la temperatura $t_1 = 100°C$ astfel încît întregul sistem trece într-o nouă stare de echilibru termic la temperatura t. În acest proces de încălzire gazul din corpul de pompă se destinde izobar efectuînd un lucru mecanic $L = 492{,}3$ J. Să se calculeze: a) temperatura t; b) căldura Q cedată de vaporii de apă introduși neglijînd căldura preluată de corpul de pompă și de vas; c) cantitatea x de vapori de apă introduși. $\mu_{N_2} = 28$ kg/kmol.

2.199. Un rezervor cu secțiune foarte mare, are pe fund un orificiu cu secțiunea $S = 1$ cm² prin care curge în timpul $\tau = 120$ s, o cantitate de apă cu temperatura $t_1 = 25°C$. Apa ce a curs este strînsă într-un vas și încălzită pînă în momentul în care 10% din masa m de apă se transformă în vapori prin fierbere la presiunea $H = 10^5$ N/m². Cunoscînd înălțimea apei din rezervor $h = 1{,}275$ m, să se calculeze: a) viteza de curgere a apei v, debitele de volum D_v și de masă D_m, cantitatea m de apă; b) căldura necesară și cantitatea de combustibil x utilizat, dacă randamentul de încălzire este $\eta = 55\%$ iar puterea calorică a combustibilului este $q = 4 \cdot 10^7$ J/kg; c) volumul V_2 ocupat de vaporii de apă obținuți, dacă își reduc presiunea la $p_2 = 0{,}25 \cdot 10^5$ N/m², temperatura rămînînd constantă.

• **2.200.** Să se calculeze variația entropiei în cazul transformării a 10 g de gheață aflată la $t_1 = -20°C$ în vapori la $t_2 = 100°C$. Se cunosc: $c_{gheață} = 2100$ J/kg · K, $\lambda_{topire} = 334$ kJ/kg, $c_{apă} = 4200$ J/kg · K și $\lambda_{vaporizare} = 2{,}25$ MJ/kg.

+ • **2.201.** Într-un calorimetru, cu echivalentul în apă $m_c = 25$ g, se află $m_g = 100$ g gheață la temperatura $t_0 = -10°C$. Se toarnă în calorimetru $m_p = 683$ g fosfor topit la temperatura $t_1 = 60°C$. Temperatura finală a amestecului va fi $t_f \approx 10°C$. Să se calculeze căldura latentă de topire a fosforului știind că temperatura sa de topire este $t_t = 44°C$, căldura specifică a fosforului în fază solidă este $c_s = 785$ J/kg · K, iar în fază lichidă $c_l = 850$ J/kg · K. Căldura specifică a gheții se va considera $c_g = 2100$ J/kg · K, a apei, $c_a = 4200$ J/kg · K, iar căldura latentă de topire a gheții $\lambda_g = 334$ kJ/kg.

+ **2.202.** Într-un calorimetru cu capacitatea calorică $C = 160$ J/K, în care se află o cantitate $m_0 = 200$ g gheață la temperatura $t_0 = -10°C$, se introduce o bucată de alamă de masă $m = 2$ kg și

temperatura $t = 40°C$, astfel încît o parte din gheață se topește. Compoziția alamei în procente de masă este $p_1 = 60\%$ Cu și $p_2 = 40\%$ Zn. Cunoscînd căldurile specifice ale Cu și Zn, $c_1 = 395$ J/kg · K, $c_2 = 399$ J/kg · K, $c_g = 2090$ J/kg · K, $\lambda_g = 334$ kJ/kg, să se calculeze: a) căldura specifică medie a alamei; b) cantitatea de gheață ce se topește (x).

2.203. O piesă din fier cu masa $m = 325$ g este introdusă într-un calorimetru plin cu gheață la 0°C. Să se determine cantitatea de gheață ce se va topi pînă la atingerea echilibrului termic dacă volumul piesei de fier înainte de a fi introdusă în calorimetru este $V = 48$ cm³. Densitatea fierului la 0°C este $\rho_0 = 6{,}8 \cdot 10^3$ kg/m³, căldura sa specifică este $c = 500$ J/kg · grad, iar coeficientul de dilatare în volum al fierului este $\gamma = 0{,}33 \cdot 10^{-4}$ K⁻¹. Se cunoaște $\lambda_{gheață} = 34 \cdot 10^4$ J/kg.

2.204. Un vas are un orificiu prin care aerul este pompat rapid în exterior. În vas se află o cantitate de apă la temperatura 0°C. Evaporarea rapidă produce o înghețare treptată a apei. Să se determine ce parte din cantitatea de apă poate fi transformată în gheață.

2.205. Într-un calorimetru în care se află 1 kg apă la temperatura $t_0 = 0°C$ se introduce o cantitate de gheață la 0°C cu masa m_1 și o cantitate de vapori la $t_2 = 100°C$ cu masa m_2. Să se calculeze masele m_1 și m_2 știind că la atingerea temperaturii de echilibru termic în calorimetru se află o cantitate de 2 kg apă la temperatura θ. Se vor studia cazurile: a) $0 < \theta < 100°C$; b) $\theta = 0°C$; c) $\theta = 100°C$. Se cunosc: căldura latentă specifică de topire a gheții $\lambda_1 = 330 \cdot 10^3$ J/kg, căldura latentă specifică de vaporizare a apei $\lambda_2 = 2260 \cdot 10^3$ J/kg și căldura specifică a apei $c = 4180$ J/kg · K.

+ **2.206.** Să se determine cantitatea m_c de combustibil cu puterea calorică $q = 2 \cdot 10^7$ J/kg necesară pentru a transforma $m = 1{,}5$ kg gheață aflată inițial la temperatura $t_0 = -5°C$ în vapori saturați cu temperatura $t = 100°C$. Randamentul cuptorului este de 0,5. Se dau, de asemenea, căldura specifică a gheții $c_1 = 2040$ J/kg · K, căldura specifică a apei, $c_2 = 4180$ J/kg · K, căldura latentă de topire a gheții, $\lambda_1 = 330 \cdot 10^3$ J/kg, căldura latentă de vaporizare a apei, $\lambda_2 = 2250 \cdot 10^3$ J/kg.

2.207. Într-un cilindru cu piston, cu axa verticală se află închisă o cantitate de oxigen cu masa moleculară μ. Pistonul are masa m_0 și suprafața S, iar cilindrul cu pistonul au împreună capacitatea calorică C. Cilindrul este introdus într-un amestec cu masa m' de apă și gheață, aflat într-un vas cu capacitatea calorică C'. În vas se toarnă apă cu temperatura $t_1 > 0°C$. Dacă se lasă pistonul liber se observă că deplasarea lui începe în momentul cînd în vas s-a in-

·odus cantitatea m_1' de apă. Pentru o cantitate m_1 de apă introdusă ı vas temperatura finală a amestecului este t. Aceeaşi temperatură nală se obţine cînd pistonul este fixat în poziţia iniţială dacă în as se toarnă o cantitate m_1'' de apă. Cunoscînd căldura latentă pecifică de topire a gheţii λ_1, căldura specifică a apei c_1, presiunea tmosferică p_0 şi acceleraţia gravitaţională g, să se determine:) masa x a gheţii din vas; b) lucrul mecanic efectuat de gaz în ursul transformării cu pistonul liber; c) volumul iniţial V_0 şi masa ı ale gazului presupus perfect; d) variaţia energiei interne a gazului.

2.208. Într-un calorimetru se află un amestec le apă şi gheaţă la echilibru termic în care se află ırmătorul dispozitiv: un vas cilindric B prevăzut cu ın orificiu prin care se introduce un tub A închis la capătul inferior; vasul B comunică printr-un tub ›rizontal cu un cilindru gradat C (fig. 2.208). Vasul B este plin cu apă, iar în vasul C se toarnă mercur. Dacă în tubul A se introduce eter acesta se evaporă preluînd o cantitate de căldură de la apa din vasul B. Se constată că în urma transformării în gheaţă a unei cantităţi de apă mercurul din C se ridică. Introducînd în vasul A o cantitate $m_1 = 10$ g de apă la temperatura $t_1 = 10$°C se observă că mercurul coboară cu 5 diviziuni în urma transformării în apă a unei cantităţi de gheaţă din vasul B. Introducînd apoi o bilă de cupru cu masa $m_2 = 20$ g şi temperatura $t_2 = 80$°C, mercurul se retrage cu 7,2 diviziuni. Să se determine căldura specifică a cuprului dacă se cunoaşte $c_{apă} = 4185$ J/kg · K.

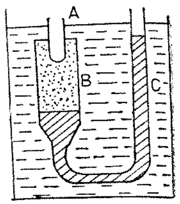

Fig. 2.208.

2.209. O bucată de gheaţă aflată la temperatura $t = -5$°C este încălzită pînă se topeşte o parte din ea. Ştiind că încălzirea se face la presiune normală să se calculeze: a) fracţiunea din masa de gheaţă topită pentru ca lucrul mecanic efectuat în cursul încălzirii să fie nul; b) căldura absorbită de unitatea de masă de gheaţă în cursul încălzirii. Se cunosc: coeficientul de dilataţie volumică al gheţii $\gamma = 10^{-5}$ K^{-1}, variaţia volumului unităţii de masă de gheaţă prin topire $v = 10^{-4}$m^3/kg, căldura specifică a gheţii $c = 2100$ J/kg · K, căldura latentă de topire a gheţii $\lambda_g = 334$ kJ/kg.

2.210. Într-un amestec ce conţine $m_1 = 3,5$ kg apă la temperatura $t_1 = 40$°C şi $m_2 = 0,5$ kg gheaţă la temperatura $t_0 = 0$°C se introduce un balon de oxigen la temperatura $t_2 = -20$°C şi presiunea $p_1 = 0,8$ atm. Să se calculeze: a) masa m_3 a oxigenului din balon, ştiind că: volumul acestuia $V_1 = 2500$ cm^3, masa unui kmol de oxigen $\mu = 32$ kg iar constanta universală a gazelor $R = 8317$ J · kmol^{-1} · K^{-1}; b) temperatura finală t_3 a sistemului (căldura specifică la volum constant a oxigenului fiind $c_v = 653 \cdot 10^3$ J/kg · K, iar căldura latentă de topire a gheţii $\lambda_1 = 334$ kJ · kg^{-1}); c) presiunea p_2 a oxigenului din balon la temperatura t_3 dacă se neglijează dilataţia vasului; d) căldura Q_1 necesară vaporizării întregii cantităţi de apă de la temperatura t_3, căldura latentă de vaporizare a apei fiind $\lambda_2 = 2,25$ MJ · kg^{-1}, la temperatura de 100°C, şi presiune normală; e) căldura absorbită de oxigenul din balon prin încălzire de la temperatura t_2 la 100°C.

2.211. Într-un calorimetru se amestecă $m_1 = 840$ g apă la temperatura $t_1 = 28$°C şi $m_1 = 24$ g gheaţă la 0°C. După topirea gheţii se introduce un cub de metal cu masa $M = 216$ g, a cărui temperatură este t_2. Ştiind că temperatura finală a amestecului devine iarăşi $t_1 = 28$°C, se cer: a) temperatura t a amestecului după topirea gheţii, înainte de introducerea cubului; b) temperatura iniţială t_2 a cubului; c) căldura cedată de cub; d) latura cubului la 0°C; e) coeficientul de dilataţie liniară a metalului, ştiind că între temperaturile t_2 şi t_1 cubul s-a contractat cu 0,11664 cm^3. Se dă: densitatea metalului la 0°C, $\rho_0 = 8000$ kg · m^{-3}, căldura specifică a metalului $c = 420$ J/kg · K, căldura latentă de topire a gheţii $\lambda = 334$ kJ · kg^{-1}.

2.212. Într-un vas se află un amestec de 100 g apă şi 8 g gheaţă la temperatura de 0°C şi presiunea de $1,013 \cdot 10^5$ N · m^{-2}. Cunoscînd căldura latentă de topire a gheţii $\lambda_t = 334$ kJ · kg^{-1} şi căldura latentă de vaporizare a apei $\lambda_v = 2,25$ MJ · kg^{-1}, se cere: a) căldura necesară pentru topirea gheţii; b) căldura totală necesară pentru transformarea amestecului în vapori la 100°C sub presiunea menţionată. Căldura specifică medie a apei în intervalul 0°C la 100°C este $c_a = 4,187$ kJ/kg · K; c) cantitatea de combustibil necesară vaporizării amestecului, dacă puterea calorică a combustibilului este 29,26 MJ/kg, iar randamentul încălzitorului 80%; d) volumul vaporilor formaţi la 100°C şi presiunea atmosferică normală, considerînd vaporii în această stare gaz perfect. Masa molară a apei $\mu = 18$ kg/kmol.

2.213. Într-un vas cu capacitatea calorică neglijabilă se află o cantitate $m = 0,1$ kg de apă la temperatura $t_1 = 17$°C. În vas se introduce o bucată de gheaţă cu masa $m_g = 20$ g şi temperatura $t_2 = -10$°C. a) Să se determine temperatura finală a amestecului. Căldura specifică a gheţii este $c_g = 2,1$ kJ/kg · K, a apei $c_a = 4176$ J/kg · K iar căldura latentă de topire $\lambda_g = 334$ kJ/kg. b) Apa rezultată este adusă la 100°C cu ajutorul unui încălzitor electric cu rezistenţa $R = 37,5$ Ω şi randamentul $\eta = 80$% în timp de 418 secunde. Să se calculeze puterea electrică a încălzitorului.

2.214. a) Un cilindru de volum V conţine ozon la presiunea p_1 şi are greutatea G_1. Se scoate gaz din cilindru la temperatura constantă a mediului ambiant pînă la presiunea p_2 şi greutatea G_2. a) Să se calculeze densitatea gazului, la temperatura mediului am-

iant și la presiunea atmosferică normală p_0. b) În cilindru a ma-
îmas o masă m de ozon la temperatura T_1. Considerăm că ozonul
e transformă în întregime în oxigen. De cîte ori va crește presiunea
n cilindru dacă pentru formarea unei molecule gram de ozon din
xigen trebuie să se cheltuiască căldura q? Se consideră cunoscute:
ăldura molară a oxigenului $C_v = \frac{5}{2} R$, masele molare μ_1 (ozon)
i μ_2 (oxigen). c) Oxigenul este adus la temperatura T. Cilindrul în
are se află oxigenul comunică printr-un tub prevăzut cu un reci-
ient plin cu apă la temperatura $T_3 = 373$ K ($T > T_3$). Se deschide
obinetul și se constată că presiunea finală este $2p_0$ și că rămîne
pă lichidă la 373 K. Să se calculeze masa de apă vaporizată și
emperatura T. Se cunosc căldura latentă specifică de vaporizare
a apei λ_v și masa molară a apei μ.

REZOLVĂRI

2.1. Legile gazelor ideale

2.1. Transformarea gazului din barometru este izocoră (volumul ocupat de gaz este constant), deci

$$\frac{p_1'}{T_1} = \frac{p_2'}{T_2} \quad \text{unde } p_1' = p_0 - p_1;\ p_2' = p_0 - \rho(a+g)h = p_0 - (a+g)\frac{p_1}{g}.$$

Deci $\frac{p_0 - p_1}{T_1} = \frac{p_0 - (a+g)\frac{p_1}{g}}{T_2}$ de unde se obține

$$a = g\,\frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_1} = 0{,}65 \text{ m/s}^2.$$

2.2. a) Transformarea fiind izobară: $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, unde $V_2 = V_1\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ rezultă $T_1 = n\Delta T$ și $T_2 = T_1 + \Delta T$.

b) Analog $\frac{V_1}{T_1'} = \frac{V_2}{T_2}$, unde $V_2 = nV_1$ și $T_2 = T_1' + \Delta T$, rezultînd $T_1' = \frac{\Delta T}{n-1}$.

2.3. Pentru a se rupe firul, presupunînd volumul constant, trebuie ca,

$$\frac{\frac{F}{S} + p_0}{T_1} = \frac{p_0}{T}, \text{ de unde } T_1 = \frac{(F + p_0 S)}{p_0 S}\,T = 390 \text{ K, sau } t_1 = 117°\text{C}.$$

2.4. Transformarea este izocoră: $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ unde $p_2 = p_1 + \frac{mg}{S}$.

Se obține $m = \frac{p_1 S}{g}\cdot\frac{T_2-T_1}{T_1} = 20$ kg.

2.5. a) Din ecuația de stare a gazului ideal, rezultă

$$m_1 = \frac{p_1V_1\mu}{RT_1} = 7,7 \text{ kg}.$$

b) $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{p_1\mu}{RT_1} = 192,5 \text{ kg/m}^3$, $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0} = 1,41 \text{ kg/m}^3$.

c) Din legea transformării izocore $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$, rezultă $T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1 = 400$ K.

2.6. Din legea generală a gazelor, avem

$p_0V = \frac{m_2-m_1}{\mu_a}RT$; $pV = \frac{m_3-m_1}{\mu_g}RT$ de unde rezultă

$\frac{p_0}{p} = \frac{m_2-m_1}{m_3-m_1}\cdot\frac{\mu_g}{\mu_a}$. În final $\mu_g = \frac{p_0}{p}\cdot\frac{m_3-m_1}{m_2-m_1}\cdot\mu_a = 48,3$ g/mol.

2.7. Ecuația de stare a gazului în cele două cazuri se scrie $p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT$; $p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT$. Cantitatea de aer evacuată este $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V\mu}{RT}(p_1 - p_2)$ care la presiunea p_0 și temperatura T, ocupă volumul,

$$V_0 = \frac{\Delta m\cdot RT}{\mu p_0} = \frac{V(p_1-p_2)}{p_0} = 135 \text{ l} = 0,135 \text{ m}^3.$$

2.8. a) Cînd cilindrul este orizontal, presiunile în cele două compartimente sînt egale, încît $pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT$; $pV_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT$ deci $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}$ și $V_1 + V_2 = V$ (1). Deoarece $V_1 = Sl_1$; $V_2 = Sl_2$; $V = SL$, relațiile (1) devin $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}$ și $l_1 + l_2 = L$. Rezultă

$$l_1 = \frac{L}{\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{\mu_1}{\mu_2}+1} = 0,33 \text{ m};\quad l_2 = \frac{L}{\frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1}+1} = 0,67 \text{ m}.$$

b) Cînd cilindrul este vertical (fig. 2.8.R) avem:

$p_1' + \frac{mg}{S} = p_2'$ (2) unde $p_1' = \frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT}{Sl_1'}$; $p_2' = \frac{m_2}{\mu_2}\frac{RT}{Sl_2'}$.

Înlocuind în relația (2) se obține:

$\frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT}{l_1'} + mg = \frac{m_2}{\mu_2}\frac{RT}{l_2'}$ (3) împreună cu $l_1' + l_2' = L$ (4).

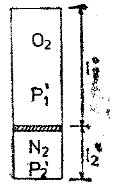

Fig. 2.8.R.

Rezolvînd sistemul de ecuații (3) și (4), se obțin

$$l_1' = 84 \text{ cm};\quad l_2' = 16 \text{ cm}.$$

2.9. Deoarece masa gazului se modifică, nu se poate aplica legea Boyle-Mariotte decît pentru fiecare cursă a pistonului. Avem succesiv:

$p_iV = p_1(V+v)$, $p_1V = p_2(V+v)$, $p_2V = p_3(V+v)$, ... $p_nV = p_f(V+v)$. Exprimînd presiunile $p_1, p_2, p_3, \ldots$, în funcție de p_i avem:

$$p_1 = \frac{p_iV}{v+V};\quad p_2 = \frac{p_1V}{V+v} = \frac{p_iV^2}{(V+v)^2},\quad p_3 = \frac{p_2V}{V+v} = \frac{p_iV^3}{(V+v)^3}.$$

Prin generalizare, după n curse, avem $p_f = p_i\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$ sau $\left(\frac{V+v}{V}\right)^n = \frac{p_i}{p_f} = 10^4$. Prin logaritmare rezultă

$$n = \frac{4}{\log\left(1+\frac{v}{V}\right)} = \frac{4}{\log(51/50)} = 465.$$

2.10. Gazul din fiecare compartiment suferă o transformare izotermă (fig. 2.10.R): $p_1V_1 = p_1'V_1'$; $p_2V_2 = p_2'V_2'$ unde $p_1 = p_2 = p$, $V_1 = V_2 = S\left(\frac{L-l}{2}\right)$, $V_1' = S\left(\frac{L-l}{2}+d\right)$, $V_2' = S\left(\frac{L-l}{2}-d\right)$. Făcînd înlocuirile, se obțin

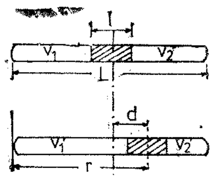

Fig. 2.10.R.

presiunile $p_1' = p\frac{L-l}{L-l+2d}$; $p_2' = p\cdot\frac{L-l}{L-l-2d}$ (1).

Între presiuni există relația evidentă $p_2' = p_1' + \frac{F_{cf}}{S} = p_1' + \frac{m\omega^2 r}{S}$ (2)

unde $r = \frac{L}{2} + d$; $m = \rho S l$ (3). Ţinînd cont de relaţiile (1) şi (3), ecuaţia (2) devine : $\omega^2 = \frac{8pd(L-l)}{\rho l(L+2d)\cdot[(L-l)^2-4d^2]}$. Deoarece $\omega = 2\pi\nu$ avem : $\nu^2 = \frac{2pd(L-l)}{\pi^2\rho(L+2d)l\cdot[(L-l)^2-4d^2]}$.

2.11. Notînd cu p_1 şi p_2 presiunile iniţială şi finală (după deplasarea dopului), avem : $\Delta p = p_2 - p_1 = p_2 - p_0 = \frac{F_f}{S_2}$ (1), de unde $F_f = (p_2 - p_0)S_2$. Gazul din interior suferă o transformare izotermă $p_1V_1 = p_2V_2$ unde $p_1 = p_0$; $V_1 = S_1l_1 + S_2l_2$; $V_2 = S_1(l_1 - d) + S_2l_2$. Făcînd înlocuirile rezultă :

$$p_2 = p_0\frac{V_1}{V_2} = p_0\frac{S_1l_1 + S_2l_2}{S_1(l_1-d)+S_2l_2}. \qquad (2)$$

Din relaţiile (1) şi (2) se obţine :

$$F_f = p_0\frac{S_1S_2d}{S_1(l_1-d)+S_2l_2} = 23{,}52 \text{ N}.$$

2.12. Cînd pistonul se află la începutul cursei, în poziţia superioară, corpul pompei se umple cu aer la presiunea p_0 (fig. 2.12.R). Coborînd pistonul, aerul pătrunde în recipientul V, încît conform legii lui Dalton :

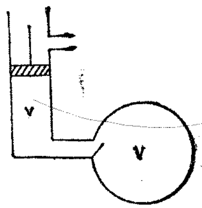

Fig. 2.12.R.

$p_iV + p_0v = p_1V$ de unde $p_1 = \frac{p_iV + p_0v}{V} = p_i + p_0\frac{v}{V}$. Pentru a doua cursă de coborîre $p_1V + p_0v = p_2V$, de unde $p_2 = p_1 + p_0\frac{v}{V} = p_i + 2p_0\frac{v}{V}$. Prin generalizare, după n curse, avem $p_n = p_i + np_0\frac{v}{V}$ deci

$$n = \frac{(p_f - p_i)V}{vp_0} = 40.$$

2.13. Ecuaţiile adiabatei şi izotermei sînt : $pV^\gamma = c_1^\gamma$ (1); $pV = c_2$ (2) unde c_1 şi c_2 sînt constante, iar $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i} > 1$. Prin diferenţierea lui (1) rezultă $V^\gamma dp + \gamma pV^{\gamma-1}\,dV = 0$ sau $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = -\frac{\gamma p}{V}$ (3). Analog, pentru (2)

$pdV + Vdp = 0$ sau $\left(\frac{dp}{dV}\right)_{iz} = -\frac{p}{V}$ (4). Deoarece $\gamma > 1$, din compararea relaţiilor (3) şi (4) rezultă $\left|\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad}\right| > \left|\left(\frac{dp}{dV}\right)_{iz}\right|$ adică adiabata descreşte mai repede ca izoterma.

2.14. a) Considerăm o transformare izotermă (fig. 2.14.a.R). Fiind vorba de aceeaşi cantitate de gaz, avem $p_1V_1 = p_2V_2$ sau $\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$.

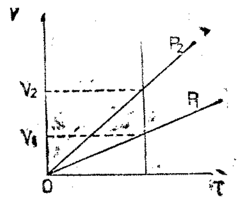

Fig. 2.14.a.R

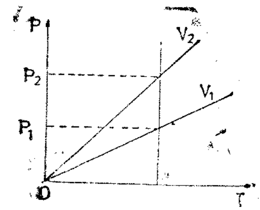

Fig. 2.14.b.R.

Deoarece $V_2 > V_1$, rezultă $p_1 > p_2$.

b) Considerăm şi în acest caz o transformare izotermă (fig. 2.14,b.R), deci $\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2}{p_1}$. Din figură se vede că $p_2 > p_1$, deci rezultă $V_1 > V_2$. La aceeaşi concluzie s-ar fi ajuns dacă, s-ar fi considerat o izocoră în primul caz sau o izobară în al doilea caz.

2.15. Din ecuaţia de stare $pV = \frac{m}{\mu}RT$, rezultă legătura dintre debite, dacă se împarte membrul drept şi stîng prin timpul t, avînd $pD_V = \frac{D_m}{\mu}RT$(1). Pe de altă parte $D_V = \frac{V}{t} = \frac{Sl}{t} = S\cdot v = \frac{\pi d^2}{4}\cdot v$ (2). Din relaţiile (1) şi (2) rezultă : $d = \sqrt{\frac{4D_mRT}{\pi\mu vp}} = 5{,}45\cdot10^{-2}$ m/s.

2.16. a) Din ecuaţia de stare a gazului $pV = \frac{m}{\mu}RT$ şi din relaţiile de definiţie ale debitelor $D_m = \frac{m}{t}$; $D_V = \frac{V}{t}$ rezultă $pD_V = \frac{D_mRT}{\mu}$. Deci $D_V = \frac{RT}{p\mu}D_m = \frac{R(t+273)}{p\mu}\cdot D_m$.

b) $D_V = \frac{V}{t} = \frac{Sl}{t} = S\cdot v_m$, încît $v_m = \frac{D_V}{S} = \frac{R(t+273)D_m}{Sp\mu}$.

2.17. a) Pistoanele se află în echilibru dacă forţele ce acţionează asupra lor îşi fac echilibrul adică $(p_1 - p_0)S_1 = (p_2 - p_0)S_2$ (1). Gazul din primul cilindru suferă o transformare generală $\frac{p_0V_1}{T} = \frac{p_1V_1'}{T_1}$ (2) unde $V_1' = V_1 + xS_1$, x fiind deplasarea pistoanelor. Gazul din cilindrul al doilea suferă o transformare izotermă $p_0V_2 = p_2V_2'$ (3) unde $V_2' = V_2 - xS_2$. Relaţiile (2) şi (3) devin $\frac{p_0V_1}{T} = \frac{p_1(V_1 + xS_1)}{T_1}$; $p_0V_2 = p_2(V_2 - xS_2)$ care împreună cu relaţia (1) formează un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute x, p_1 şi p_2. Rezolvînd sistemul se obţine $p_1 = 1{,}2 \cdot 10^5$ N/m²; $p_2 = 1{,}6 \cdot 10^6$ N/m²;

b) $x = 0{,}075$ m.

c) Din relaţiile $p_1 - p_0 = \frac{F_1}{S_1}$; $p_2 - p_0 = \frac{F_2}{S_2}$ rezultă tensiunea din tijă $F = F_1 + F_2 = (p_1 - p_0)S_1 + (p_2 - p_0)S_2 = 15{,}6$ kN.

2.18. a) Prin încălzirea vasului A, acesta suferă o transformare generală

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_1'V_1'}{T_1'}$$

unde $V_1 = aS$; $V_1' = (a + x)S$, încît, relaţia anterioară devine: $\frac{ap_1}{T_1} = \frac{(a + x)p_1'}{T_1'}$ (1). Vasul B suferă o transformare izotermă $p_2V_2 = p_2'V_2'$ unde $V_2 = aS$; $V_2' = (a - x)S$ încît $p_2a = p_2'(a - x)$ (2). În relaţiile (1) şi (2) avem $p_1 = p_2$ şi $p_1' = p_2'$, încît prin împărţirea lor, rezultă $\frac{1}{T_1} = \frac{a + x}{a - x} \cdot \frac{1}{T_1'}$ de unde $x = a\frac{T_1' - T_1}{T_1' + T_1} = 5$ cm. Din relaţia (2) se obţine: $p_2' = \frac{p_2a}{a - x} = \frac{p_1a}{a - x} = \frac{4}{3} \cdot 10^5$ N/m².

b) Vasul A este supus unei transformări izocore $\frac{p_1'}{T_1'} = \frac{p_1''}{T_1}$ de unde rezultă: $p_1'' = \frac{T_1}{T_1'} \cdot p_1' = \frac{4}{5} \cdot 10^5$ N/m²,

c) Se scrie ecuaţia de stare pentru vasul B, în cele două situaţii $p_2'V_2' = \frac{m_2'}{\mu}RT_1$; $p_1''V_2' = \frac{m_2''}{\mu}RT_1$.

Prin scăderea lor avem:

$$(p_2' - p_1'')V_2' = \left(\frac{m_2' - m_2''}{\mu}\right)RT_1 = \frac{\Delta m}{\mu}RT_1 \quad \text{de unde}$$

$$\Delta m = \frac{\mu(p_2' - p_1'')V_2'}{RT_1} = \frac{\mu(p_2' - p_1'')(a - x)S}{RT_1} = 0{,}00372 \text{ kg}.$$

2.19. a) Conform figurii 2.19.R. avem

$$\frac{p_1V_1}{T} = \frac{p(V_1 + \Delta V)}{T_1}, \quad \frac{p_2V_2}{T} = \frac{p(V_2 - \Delta V)}{T_2}.$$

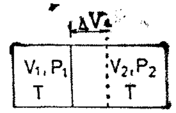

Fig. 2.19.R.

Făcînd raportul lor rezultă:

$$\frac{p_1V_1}{p_2V_2} = \left(\frac{V_1 + \Delta V}{V_2 - \Delta V}\right) \cdot \frac{T_2}{T_1} \quad \text{sau} \quad \Delta V = \frac{V_1V_2(p_1T_1 - p_2T_2)}{p_1V_1T_1 + p_2V_2T_2}.$$

b) În starea iniţială

$$\rho_1 = \frac{p_1\mu}{RT}; \quad \rho_2 = \frac{p_2\mu}{RT}; \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2}; \quad p_1V_1 = \nu_1RT;$$

$p_2V_2 = \nu_2RT$; $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1V_1}{p_2V_2}$. In starea finală

$$\rho_1' = \frac{p\mu}{RT_1}; \quad \rho_2' = \frac{p\mu}{RT_2}; \quad \frac{\rho_1'}{\rho_2'} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Sistemele fiind izolate, nu se modifică raportul numărului de moli, deci $\frac{\nu_1'}{\nu_2'} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$.

2.20. a) Din ecuaţiile de stare pentru fiecare gaz, avem $pV_1 = \nu_1RT_1$; $pV_2 = \nu_2RT_2$ de unde $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1T_1}{\nu_2T_2}$ (1). Din relaţia (1) şi din condiţia evidentă $V_1 + V_2 = V$ rezultă

$$V_1 = V\frac{\nu_1T_1}{\nu_1T_1 + \nu_2T_2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad (2)$$

$$V_2 = V\frac{\nu_2T_2}{\nu_1T_1 + \nu_2T_2} = 4 \cdot 10^{-3} \text{m}^3 \quad (3).$$

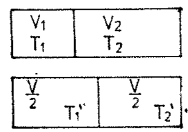

Fig. 2.20.R.

b) Conform figurii 2.20.R şi din faptul că presiunea nu se modifică, rezultă că gazul suferă o transformare izobară pentru fiecare

compartiment, adică

$\frac{V_1'}{T_1'} = \frac{V/2}{T_1'}$; $\frac{V_2'}{T_2} = \frac{V/2}{T_2'}$. Deci $T_1' = \frac{T_1 V}{2V_1} = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{2\nu_1} = 450$ K,

$T_2' = \frac{T_2 V}{2V_2} = \frac{\nu_1 T_1 + \nu_2 T_2}{2\nu_2} = 300$ K unde s-au folosit şi relaţiile (2) şi (3).

2.21. Avem succesiv $p_1 V_1 = p_2 V_2$ (1), $p_1' V_1' = p_2' V_2'$ (2), $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$ (3), $p_2 - p_1 = p_2' - p_1'$ (4). Notînd raportul $\frac{V_1'}{V_2'} = x$, din relaţiile (1) şi (2) rezultă $\frac{p_2}{p_1} = n$; $\frac{p_2'}{p_1'} = x$ (5). Ţinînd cont de relaţiile (3), (4) şi (5) avem: $V_1\left(1 + \frac{1}{n}\right) = V_1'\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ (6),

$p_1(n - 1) = p_1'(x - 1)$ (7) adică $p_1 V_1 \left(1 + \frac{1}{n}\right)(n - 1) =$

$= p_1' V_1' \left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - 1)$ (8). Deoarece $\frac{p_1 V_1}{T} = \frac{p_1' V_1'}{T'}$ relaţia (8) devine $\frac{T'}{T}\left(1 + \frac{1}{n}\right)(n - 1) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)(x - 1)$ sau

$x^2 + \frac{T}{nT'}(1 - n^2)x - 1 = 0$. Soluţia acceptabilă este:

$$x = \frac{n^2 - 1}{2nT'} T + \sqrt{1 + \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{4n^2}}.$$

2.22. a) Pentru transformarea izotermă: $p_1 V_1 = p_2 V_2$ sau $V_1(H - h_1) = (H - x)V_2$ unde $p_0 = \rho_{Hg}\, gH$, rezultă

$x = \frac{H(V_2 - V_1) + V_1 h_1}{V_2} = 47{,}2$ cm, $h_{total} = x + l_2 =$

$x + \frac{V_2}{S} = 72{,}2$ cm.

b) Între stările (1) şi (3) avem o transformare generală

$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_3 V_3}{T_3}$, unde $p_1 = \rho_{Hg} g(H - h_1)$;

$p_3 = H - (h_1 + l_1 - h_3)\, \rho_{Hg} \cdot g = \rho_{Hg} \cdot g \left[H - \left(h_1 + \frac{V_1}{S} - \frac{V_3}{S}\right)\right] =$

$= (H - 35)\, \rho_{Hg} \cdot g$ În final, se obţine:

$T_3 = \frac{p_3}{p_1} \cdot \frac{V_3}{V_1} T_1 = 421{,}4$ K.

c) $p_0 = p_{amestec} + \rho_{Hg} \cdot gh_4 = (p_{aer} + p_{H_2}) + \rho_{Hg} \cdot gh_4 =$

$= \nu_a \frac{RT}{V_4} + \frac{m_H}{\mu_H} \frac{RT}{V_4} + \rho_{Hg} \cdot gh_4$. Se obţine

$$m_H = \mu_H \cdot \frac{V_4}{RT}\left[p_0 - \rho_{Hg} \cdot gh_4 - \nu_a \frac{RT}{V_4}\right] = 1{,}56 \text{ g}.$$

2.23. a) Din ecuaţia termica de stare,

$$(H_1 - p_1)(l - h_1)S = \frac{m_{aer}}{\mu_{aer}} RT_1, \text{ unde } h_1 = 704 \text{ mm}.$$

Deci, $m_{aer} = \frac{(H_1 - p_1)(l - h_1)S\mu_{aer}}{RT_1} = 1{,}33$ mg.

b) Scriind ecuaţia transformării generale pentru aerul din tub $\frac{(H_1 - p_1)(l - h_1)S}{T_0} = \frac{(H_2 - p_2)(l - h_2)S}{T}$ rezultă

$$H_2 = p_2 + \frac{(H_1 - p_1)(l - h_1)T}{T_0(l - h_2)} = 749 \text{ torr} = 99\,617 \text{ N/m}^2.$$

2.24. a) $F_{asc} = G_{aer} - G_{He} = g(m_a - m_{He})$, unde $m_a = \frac{pV}{RT}\mu_a$;

$m_{He} = \frac{pV}{RT}\mu_{He}$. Rezultă $F_{asc} = g\frac{pV}{RT}(\mu_a - \mu_{He})$, încît

$$V = \frac{F_{asc} \cdot RT}{gp(\mu_a - \mu_{He})} = 6{,}37 \text{ m}^3, \quad m_{He} = \frac{pV}{RT} \cdot \mu_{He} = 4{,}47 \text{ kg}.$$

b) $V' = \frac{m_{He}}{\mu_{He}} \cdot \frac{RT'}{p_0} = 9{,}28$ m³.

$$F'_{asc} = \frac{gp_0 V'}{RT'}(\mu_{aer} - \mu_{He}) = 29{,}8 \text{ kN}.$$

2.25. Gazul din cilindru suferă o transformare generală $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{pV}{T}$ unde $p = p_0 + \frac{k\,\Delta l}{S}$; $V = V_0 + S\Delta l$; $T = T_0 + \Delta T$.

Se obţine ecuaţia $\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{\left(p_0 + \frac{k\Delta l}{S}\right)(V_0 + S\Delta l)}{T_0 + \Delta T}$ sau, $k(\Delta l)^2 +$

$$+\left(\frac{k}{S}V_0 + Sp_0\right)\Delta l - \frac{\Delta T}{T_0}p_0V_0 = 0.$$ Rezolvînd numeric:

$$(\Delta l)^2 + 1{,}2\ \Delta l - \frac{10}{273} = 0$$ de unde rezultă $\Delta l = 0{,}03\ \text{m} = 3\ \text{cm}$.

2.26. Pentru stările finale ale gazelor din cele două baloane ecuațiile sînt $pV_1 = N_1kT_1$ și $pV_2 = N_2kT_2 = (N - N_1)kT_2$, unde N este numărul total de molecule de gaz, care este dat de starea inițială, $N = \dfrac{p_0(V_1 + V_2)}{kT_0}$. Din aceste ecuații rezultă

$$p = p_0 \cdot \frac{T_2}{T_0} \cdot \frac{(V_1 + V_2)T_1}{V_2T_1 + T_2V_1} = 1{,}012 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

2.27. Notăm cu p_1, N_1 și p_2, N_2 presiunea și numărul de molecule din rezervoarele mare și mic după încălzirea la temperatura $T = 435$ K. Trebuie îndeplinită condiția $p_1 - p_2 = p_0 = 88$ cm Hg. Notăm cu $N = N_1 + N_2$ numărul total de molecule. Atunci, $N = \dfrac{pV_1}{kT_0}$, unde $p = 1$ atm. și $T_0 = 290$ K. Pentru starea finală putem scrie două ecuații:

$$(p_0 + p_2)V_1 = N_1kT \quad \text{și} \quad p_2V_2 = N_2kT = (N - N_1)kT.$$

Din acest sistem:

$$p_2 = \frac{NkT - p_0V_1}{V_1 + V_2} = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\left(p\frac{T}{T_0} - p_0\right) = 200\ \text{mm Hg} = 2{,}66 \cdot 10^4\ \text{N/m}^2.$$

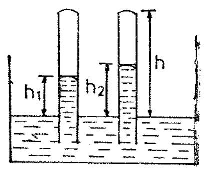

Fig. 2.28.R.

2.28. a) Notînd cu p_0 presiunea atmosferică, ecuația de stare pentru gazul din prima eprubetă (fig. 2.28.R) este $p_1V_1 = \nu_{O_2}RT_0$, sau

$$(p_0 - \rho_{Hg} \cdot gh_1)(h - h_1)S = \frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}RT_0,$$

de unde $$p_0 = \rho_{Hg} \cdot gh_1 + \frac{m_{O_2}RT_0}{\mu_{O_2}(h - h_1)S} = 10^5\ \text{N/m}^2.$$

b) Pentru eprubeta a doua $(p_0 - \rho_{Hg} \cdot gh_2)(h - h_2)S = \dfrac{m_{H_2}}{\mu_{H_2}} \cdot RT_0$, de unde $$m_{H_2} = \frac{\mu_{H_2}(p_0 - \rho_{Hg} \cdot gh_2)(h - h_2)S}{RT_0} = 1{,}229\ \text{mg}.$$

2.29. În poziția de echilibru avem $F_A - G - F = 0$ unde $F_A = \rho gl_1S$, l_1 fiind lungimea tubului neocupată de apă. Dacă se notează cu p_1 presiunea aerului din tub, putem scrie legea transformării izoterme $p_0lS = p_1l_1S$. Forța arhimedică se mai poate scrie $F_A = p_1S - (p_0 + \rho gh)S$. Din cele 4 ecuații eliminînd pe l_1 și p_1 se obține:

$$F = \frac{S}{2}\left[\sqrt{(p_0 + \rho gh)^2 + 4p_0\rho gh} - (p_0 + \rho gh)\right] - G = 8{,}65 \cdot 10^{-2}\text{N}.$$

2.30. a) Conform figurii 2.30. R avem $pV = p_1V_1$ și $pV = p_2V_2$ sau $pS\dfrac{L}{2} = p_1S\left(\dfrac{L}{2} + \Delta l\right)$; $pS\dfrac{L}{2} = p_2S\left(\dfrac{L}{2} - \Delta l\right)$, de unde rezultă

$$p_1 = \frac{pL}{L + 2\Delta l} = 0{,}55 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2.$$

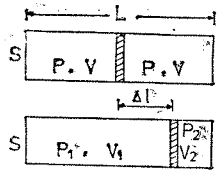

Fig. 2.30.R.

b) $F = (p_2 - p_1)S = 8{,}9 \cdot 10^3\text{N}$.

c) Trebuie să scoatem din recipientul al doilea atîta gaz pînă cînd presiunile se egalează ($p_1 = p_2$). Deci

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu}RT; \quad p_1V_2 = \frac{m_2'}{\mu}RT; \quad (p_2 - p_1)V_2 = \frac{m_2 - m_2'}{\mu}RT = \frac{\Delta m}{\mu}RT$$

sau $$\Delta m = \frac{(p_2 - p_1)\mu V_2}{RT} = 0{,}0228\ \text{kg}.$$

2.31. a) $m_1 = \dfrac{p_1V_1\mu}{RT_1} = 0{,}13$ kg; $\rho_1 = \dfrac{m_1}{V_1} = 13\ \text{kg/m}^3$.

b) Din ecuația de stare $p_1V_1 = \nu_1RT_1$; $p_2V_1 = \nu_2RT_1$ se obține: $(p_1 - p_2)V_1 = (\nu_1 - \nu_2)RT_1 = \Delta\nu RT_1$.

Deci $$\Delta\nu = \frac{(p_1 - p_2)V_1}{RT_1} = 33\ \text{moli}.$$

2.32. Din ecuațiile de stare $p_1V_1 = \dfrac{m_1}{\mu}RT_1$ și $p_1V_1 = \dfrac{m_2}{\mu}RT_2$ rezultă $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{T_2}{T_1}$ și $m_1 - m_2 = \Delta m$. În final:

$$\Delta m = m_1\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 1{,}93\ \text{kg}.$$

2.33. Ecuația de stare a gazului înainte și după eliminarea unei părți din gaz este

$$p_1V = \frac{m_1 - m}{\mu} RT; \quad p_2V = \frac{m_2 - m_1}{\mu} RT$$

unde m este masa balonului de sticlă fără gaz. Prin scăderea relațiilor, avem: $(p_1 - p_2)V = \frac{m_1 - m_2}{\mu} RT$ (1). Densitatea gazului în condiții normale, este $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}$ (2). Înlocuind μ din relația (1) în (2) se obține în final

$$\rho_0 = \frac{m_1 - m_2}{p_1 - p_2} \cdot \frac{T}{V} \cdot \frac{p_0}{T_0}.$$

2.34. a) În starea inițială, $p_1V = \nu_1RT_1$ (1), de unde $\nu_1 = \frac{p_1V}{RT_1}$. Pentru a calcula volumul V al buteliei, scriem ecuația de stare și în starea finală, $p_2V = \frac{m_2}{\mu} RT_2$ (2). Din (1) și (2), $\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{V\mu}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)$ și $V = \frac{\Delta m \cdot R}{\mu\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)}$. Deci:

$$\nu_1 = \frac{p_1}{RT_1} \cdot \frac{\Delta mR}{\mu\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)} = \frac{\Delta m}{\mu\left(1 - \frac{p_2T_1}{p_1T_2}\right)} = 0{,}2 \text{ kmol} = 200 \text{ mol}.$$

b) În starea finală,

$$m_2 = \frac{p_2V\mu}{RT_2} = \frac{p_2\mu}{RT_2} \cdot \frac{\Delta m \cdot R}{\mu\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)} = \frac{\Delta m}{\frac{p_1T_2}{p_2T_1} - 1} = 2{,}4 \text{ kg}.$$

2.35. a) $\rho_1 = \frac{p_1\mu}{RT_1} = 0{,}080 \text{ kg/m}^3$;

$$\rho_2 = \frac{p_0\mu}{RT_2} = 0{,}073 \text{ kg/m}^3;$$

b) $m_1 = m_2 + \Delta m$, $\rho_1V = \rho_2V + \Delta m$, deci

$$V = \frac{m}{\rho_1 - \rho_2} = \frac{\Delta m}{\frac{p_1\mu}{RT_1} - \frac{p_1\mu}{RT_2}} =$$

$$= \frac{\Delta m}{\frac{p_1\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} = \frac{\Delta mRT_1T_2}{p_1\mu(T_2 - T_1)} = 6{,}85 \text{ m}^3;$$

c) $m_2 = m_1 - \Delta m = \frac{p_1V\mu}{RT_1} - \Delta m = 499$ g.

d) $N_2 = \nu_2N_A = \frac{m_2}{\mu}N_A = 1{,}50 \cdot 10^{26}$ molecule.

2.36. a) $m_1 = \frac{p_1V_1\mu}{RT_1} = 0{,}1$ kg.

b) $p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_1$, $p_2V_1 = \frac{m_2}{\mu}RT_1$. Prin scăderea lor avem $(p_1 - p_2)V_1 = (m_1 - m_2)\frac{RT_1}{\mu}$ încît

$$\nu = \frac{m_1 - m_2}{\mu} = \frac{(p_1 - p_2)V_1}{RT_1} = 2{,}65 \text{ moli}.$$

c) Volumul recipientului fiind același, avem:

$$p_2V_1 = \frac{m_2}{\mu}RT_1; \quad p_2V_1 = \frac{m_3}{\mu}RT_3. \text{ Deci:}$$

$$m_2T_1 = m_3T_3 = (m_2 - \Delta m)T_3 \text{ sau}$$

$$\Delta m = m_2\left(\frac{T_3 - T_1}{T_3}\right) = \frac{p_2V_1\mu}{R} \cdot \frac{T_3 - T_1}{T_1T_3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg}.$$

2.37. a) $\rho_1 = \rho_0\frac{p_1}{p_0}\frac{T_0}{T_1} = 83{,}66 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

b) $m = V(\rho_1 - \rho_2) = V\rho_0\frac{p_1}{p_0}T_0\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$, de unde $V = 1{,}0108 \cdot 10^3 \text{m}^3$.

c) $G_2 = \rho_2Vg = mg\frac{T_1}{T_2 - T_1} = 776{,}42$ N.

d) $n = \frac{m_2}{\mu}\cdot N = N\frac{m}{\mu}\frac{T_1}{T_2 - T_1} = 2{,}38\cdot 10^{28}$ molecule.

e) $p_3 = p_1\frac{T_3}{T_1} = 1{,}16\cdot 10^5$ N/m².

2.38. Din relațiile $V_1 + V_2 = V$ și $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3}$ se obține $V_1 = 2\cdot 10^{-2}$ m³ și $V_2 = 6\cdot 10^{-2}$ m³ (fig. 2.38.R). Ecuația de stare pentru H_2 este

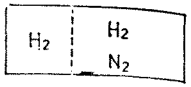

Fig. 2.38.R.

$$p_1(V_1 + V_2) = \frac{m_1}{\mu_1}RT, \text{ de unde: } p_1 = \frac{m_1RT}{\mu_1(V_1 + V_2)} =$$

$= 6{,}23\cdot 10^5$N/m². Ecuația de stare pentru N_2 este:

$$p_2V_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT \text{ de unde } p_2 = \frac{m_2RT}{\mu_2V_2} = \nu_2\frac{RT}{V_2} = 2{,}08\cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Presiunea în primul compartiment va fi numai cea dată de H_2, deci $p_1 = 6{,}23\cdot 10^5$N/m². Presiunea totală în compartimentul de volum V_2 va fi suma presiunilor parțiale ale N_2 și H_2, deci $p = p_1 + p_2 = 8{,}31\cdot 10^5$N/m².

2.39. a) Din conservarea numărului de moli, avem:

$$\nu_1 + \nu_2 = \nu \text{ sau } \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} = \frac{m_1 + m_2}{\mu}. \text{ Rezultă:}$$

$$\mu = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}} = 5{,}7 \text{ kg/kmol}.$$

b) $\rho = \frac{p\mu}{RT} = 23{,}6$ kg/m³, $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0} = 2{,}5$ kg/m³.

c) $pV = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)RT$ de unde rezultă

$$V = \frac{RT}{p}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right) = 5{,}06\cdot 10^{-3}\text{ m}^3,$$

d) $p_1 = \frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT}{V} = 9{,}6\cdot 10^5$ N/m²;

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu_2}\frac{RT}{V} = 0{,}4\cdot 10^5 \text{ N/m}^2.$$

2.40. a) În starea inițială $pV_1 = \nu_1RT(1)$, $pV_2 = \nu_2RT$ (2) iar în starea finală $p'V_1' = \nu_1R(T - \Delta T)$ (3), $p'V_2' = \nu_2R(T + \Delta T)$ (4). Făcînd rapoartele lor, găsim $\frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}$; $\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{\nu_1}{\nu_2}\cdot\frac{T - \Delta T}{T + \Delta T}$,

încît $\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{V_1}{V_2}\cdot\frac{T - \Delta T}{T + \Delta T}$, deci: $n_2 = n_1\frac{T - \Delta T}{T + \Delta T}$, de unde rezultă $\Delta T = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}T$ (5).

b) Făcînd raportul relațiilor (1) la (3), rezultă $\frac{V_1}{V_1'}\cdot\frac{p}{p'} = \frac{T}{T - \Delta T}$ (6). Din relația $V_1 + V_2 = V_1' + V_2'$ rezultă: $V_1\left(1 + \frac{1}{n_1}\right) = V_1'\left(1 + \frac{1}{n_2}\right)$ încît:

$\frac{V_1'}{V_1} = \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{n_1 + 1}{n_2 + 1}$ (7). Din relațiile (6) și (7) avem:

$$\frac{p}{p'} = \frac{V_1'}{V_1}\cdot\frac{T}{T - \Delta T} = \frac{n_1 + 1}{n_2 + 1}\cdot\frac{n_1 + n_2}{2n_1}.$$

2.41. a) Din ecuațiile de stare: $pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT$; $pV_2 = \frac{m_2}{\mu_2}RT$ rezultă $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{\mu_1}\cdot\frac{\mu_2}{m_2}$ și $V_1 + V_2 = V$.

În final, se obține: $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \frac{2}{3}$.

b) Din expresiile densităților $\rho_1 = \frac{m_1}{V_1} = \frac{p\mu_1}{RT}$; $\rho_2 = \frac{p\mu_2}{RT}$ rezultă: $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{16}$. Din expresiile numărului de moli $\nu_1 = \frac{m_1}{\mu_1}$; $\nu_2 = \frac{m_2}{\mu_2}$ se obține: $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$.

2.42. Din legea de stare și ținînd cont de faptul că în starea finală presiunea este aceeași, avem:

$$pV_1 = \nu_1RT_1;\quad pV_2 = \nu_2RT_2 \text{ sau } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}\cdot\frac{T_1}{T_2} \quad (1).$$

Din relația (1) și din conservarea numărului de moli:

$\nu = \nu_1 + \nu_2$ (2) rezultă $\nu_1 = \frac{\nu V_1T_2}{T_1V_2 + V_1T_2} = 0{,}085$ kmoli.

$\nu_2 = \nu\cdot\frac{T_1V_2}{T_1V_2 + V_1T_2} = 0{,}115$ kmoli.

2.43. a) $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 = \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\frac{\mu}{R} = -63{,}26\ \mathrm{kg/m^3}$.

$$\Delta N = N_1 - N_2 = (\nu_1 - \nu_2)N_A = \left(\frac{p_1V_1}{T_1} - \frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{N_A}{R} = 1{,}3\cdot 10^{26};$$

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{N_1}{V_1} - \frac{N_2}{V_2} = \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right)\frac{N_A}{R} = -1{,}18\cdot 10^{28}\ \text{molecule/m}^3.$$

b) Din conservarea numărului de moli, avem:

$\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p(V_1+V_2)}{T}$, de unde

$$p = \frac{\left(\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}\right)T}{V_1+V_2} = 4{,}2\cdot 10^6\ \mathrm{N/m^2}.$$

c) $\Delta m = m_1 - m_1'$, unde m_1 și m_1' sînt masele de oxigen din recipientul 1, înainte și după deschiderea robinetului. Se obține:

$$p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT_1;\quad pV_1 = \frac{m_1'}{\mu}RT \quad \text{adică}$$

$$\Delta m = \frac{V_1\mu}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p}{T}\right) = 2{,}1\ \mathrm{kg}.$$

2.44. a) Din legea transformării generale avem:

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_0V_{01}}{T_0};\quad \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{p_0V_{02}}{T_0}\ \text{încît:}$$

$$\Delta V_0 = V_{01} - V_{02} = \frac{T_0}{p_0}\left(\frac{p_1V_1}{T_1} - \frac{p_2V_2}{T_2}\right).$$

b) Din conservarea numărului de moli: $\nu_1 + \nu_2 = \nu_1' + \nu_2'$, rezultă: $\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2} = \frac{pV_1}{T} + \frac{pV_2}{T}$, încît

$p = \frac{T}{V_1+V_2}\left(\frac{p_1V_1}{T_1} + \frac{p_2V_2}{T_2}\right)$. Presiunile parțiale, rezultă din relațiile: $p_{1p}(V_1+V_2) = \nu_1RT$; $p_{2p}(V_1+V_2) = \nu_2RT$ încît:

$p_{1p} = \frac{\nu_1RT}{V_1+V_2}$; $p_{2p} = \frac{\nu_2RT}{V_1+V_2}$, unde $\nu_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$; $\nu_2 = \frac{p_2V_2}{RT_2}$.

Se obține: $p_{1p} = \left(\frac{p_1V_1}{V_1+V_2}\right)\frac{T}{T_1}$; $p_{2p} = \left(\frac{p_2V_2}{V_1+V_2}\right)\frac{T}{T_2}$

c) $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_1'$, unde: $\nu_1 = \frac{p_1V_1}{RT_1}$; $\nu_1' = \frac{pV_1}{RT}$,

încît: $\Delta\nu = \frac{V_1}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p}{T}\right)$.

2.45. a) Conform legii lui Dalton: $p = p_{1p} + p_{2p} + p_{3p}$ unde

$$p_{1p} = \nu_1\frac{RT}{V} = \frac{N_1}{N_A}\cdot\frac{RT}{V};\quad p_{2p} = \frac{N_2}{N_A}\cdot\frac{RT}{V};$$

$p_{3p} = \nu_3\frac{RT}{V} = \frac{m_3}{\mu_3}\frac{RT}{V}$. Înlocuind, rezultă:

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \frac{m_3}{\mu_3}\right) = 12{,}3\cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2}.$$

b) Deoarece: $\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{N}{N_A}$, avem $m = \mu\frac{N}{N_A}$. Din conservarea numărului de moli, avem:

$$\frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \frac{m_3}{\mu_3} = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\mu} = \frac{\mu_1\frac{N_1}{N_A} + \mu_2\frac{N_2}{N_A} + m_3}{\mu},$$

se obține:

$$\mu = \frac{\mu_1\frac{N_1}{N_A} + \mu_2\frac{N_2}{N_A} + m_3}{\frac{N_1}{N_A} + \frac{N_2}{N_A} + \frac{m_3}{\mu_3}} = 33{,}83\ \mathrm{kg/kmol}.$$

c) În transformarea izobară $\frac{V}{T} = \frac{V_f}{T_f}$, rezultînd $V_f = 6{,}16\ \mathrm{l}$.

2.46. Forțele ce apar în resort în cele două cazuri sînt $F_1 = p_1S = kh_1$ și $F_2 = p_2S = kh_2$ unde p_1 și p_2 reprezintă presiunea gazului, S — aria pistonului, k — constantă de elasticitate, iar h_1 și h_2 — alungirile resortului. Prin împărțirea celor două relații se obține: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{h_1}{h_2}$. Scriind ecuațiile de stare în cele două cazuri avem: $p_1h_1S = \frac{m}{\mu}RT_1$ și $p_2h_2S = n\frac{m}{\mu}RT_2$ unde m este masa gazului introdusă sub piston în primul caz. Prin împărțire se obține: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1h_1}{nT_2h_1}$ avem deci $\frac{h_1}{h_2} = \frac{T_1h_2}{nT_2h_1}$ deci $h_2 = h_1\sqrt{\frac{nT_2}{T_1}} \approx 22{,}7\ \mathrm{cm}$.

2.47. Ecuația dreptei ce trece prin punctele de coordonate (p_1, V_1) și (p_2, V_2) se scrie $p - p_2 = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}(V - V_2)$ (1) care

este şi ecuaţia transformării. Din ecuaţia de stare, $p = \frac{\nu RT}{V}$ (2). Înlocuind (2) în (1) şi explicitîndu-l pe T se obţine: $T = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}(V - V_2)\frac{V}{\nu R} + p_2\frac{V}{\nu R}$ (3). Condiţia ca $T = f(V)$ să fie maxim se scrie: $\frac{dT}{dV} = \frac{p_2 - p_1}{R(V_2 - V_1)}(2V - V_2) + \frac{p_2}{R} = 0$ (4) care are rădăcina $V = \frac{p_2V_1 - p_1V_2}{2(p_2 - p_1)}$ (5). Înlocuind (5) în (3),

$$T_{max} = \frac{(p_2V_1 - p_1V_2)^2}{4\nu R(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)} = 496 \text{ K}.$$

2.48. a) Explozia are loc cînd diferenţa dintre presiunile gazului în balon şi cilindru devine egală cu p_b, adică

$$p_b = \frac{\nu_1 RT}{V_1} - \frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1}, \text{ deunde: } T = \frac{p_b(V_2 - V_1)V_1}{R[\nu_1(V_2 - V_1) - \nu_2 V_1]} = 500 \text{ K}.$$

b) $p = (\nu_1 + \nu_2)\frac{RT}{V_2} = 4{,}15 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

c) Explozia nu se produce, indiferent de valoarea temperaturii, dacă presiunile rămîn egale în balon şi cilindru, adică

$$\frac{\nu_1 RT}{V_1} = \frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} \text{ sau } \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{V_1}{V_2 - V_1} = \frac{1}{999}.$$

2.49. a) Pentru ca explozia recipientului să provoace şi explozia vasului trebuie ca presiunea p_2 din vas după explozia recipientului să fie mai mare ca p, iar înainte de explozie să fie mai mică decît p; cele două condiţii se scriu: $\frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} < p$ şi $(\nu_1 + \nu_2)\frac{RT}{V_2} > P$ (1) unde T este temperatura la care are loc explozia, care se deduce din condiţia ca în momentul exploziei diferenţa dintre presiunea din recipient p_1 şi presiunea din vas p_2 să fie p, adică:

$$p = \frac{\nu_1 RT}{V_1} - \frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1}, \text{ de unde } T = \frac{pV_1(V_2 - V_1)}{R[\nu_1(V_2 - V_1) - \nu_2 V_1]} \quad (2).$$

Înlocuind (2) în (1), rezultă condiţiile:

$$\nu_2 < \nu_1 \frac{P(V_2 - V_1)}{(p + P)V_1} = \frac{90}{11} = 8{,}18 \text{ moli, şi}$$

$$\nu_2 > \nu_1 \frac{(PV_2 - pV_1)(V_2 - V_1)}{V_1[p(V_2 - V_1) + pV_2]} = 8{,}17 \text{ moli. Deci,}$$

8,17 moli $< \nu_2 <$ 8,18 moli.

b) Exploziile se produc simultan dacă există o temperatură comună T pentru care $p_2 - p_1 = p$ şi $p_2 = P$, adică dacă, $\frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} = P$ şi $\frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} - \frac{\nu_1 RT}{V_1} = p$. Împărţind cele două relaţii rezultă $\nu_2 = \nu_1 \frac{P(V_2 - V_1)}{(P - p)V_1} = 10$ moli.

c) Pentru a se produce întîi explozia vasului trebuie ca simultan,

$$p_2 = P \text{ şi } p_1 - p_2 < p, \text{ adică } \frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} = P \text{ şi } \frac{\nu_1 RT}{V_1} - \frac{\nu_2 RT}{V_2 - V_1} < p.$$

Eliminînd temperatura T rezultă:

$$\nu_2 > \nu_1 \cdot \frac{P(V_2 - V_1)}{(p + P)V_1} = 8{,}18 \text{ moli}.$$

2.50. Condiţia de echilibru a pistonului este $Mg + kx = pS$ (1) iar ecuaţia de stare a gazului se scrie $phS = \frac{m}{\mu}RT$ (2). În (1) constanta k rezultă din energia de deformaţie $E = \frac{k}{2}x^2$ (3). Astfel, din (1), (2) şi (3):

$$h = \frac{mRTx}{\mu(Mgx + 2E)} = 1{,}04 \text{ m}.$$

2.51. a) $m = m_1 + m_2 = \frac{p_1V_1\mu}{RT} + \frac{p_2V_2\mu}{RT} = 0{,}0192$ kg.

$$p_1V_1 = \nu_1 RT; \quad \nu_1 = \frac{p_1V_1}{RT} = 0{,}8 \text{ moli}; \quad p_2V_2 = \nu_2 RT;$$

$$\nu_2 = \frac{p_2V_2}{RT} = 4 \text{ moli}.$$

b) Presiunea comună după deschiderea robinetului este $p = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2} = 8{,}57 \cdot 10^5 \text{N/m}^2$. Masa de He din fiecare incintă rezultă din ecuaţia de stare $pV_1 = \frac{m_1'}{\mu}RT$; $m_1' = \frac{pV_1\mu}{RT} = 5{,}5$ g;

$pV_2 = \frac{m_2'}{\mu} RT$; $m_2' = \frac{pV_2\mu}{RT} = 13{,}75$ g, iar $\nu_1' = \frac{m_1'}{\mu} = 1{,}375$ moli;

$\nu_2' = \frac{m_2'}{\mu} = 3{,}44$ moli.

c) Presiunea din primul recipient nu se modifică față de presiunea comună atinsă după deschiderea robinetului, deci

$$p_1'' = p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2} = 8{,}57 \cdot 10^5\ \mathrm{N/m^2},$$

$$p_2'' = \frac{m_2'}{\mu} \frac{RT_2}{V_2} = 1{,}14 \cdot 10^6\ \mathrm{N/m^2}.$$

d) Variația energiei interne a gazului din primul recipient este:

$$\Delta U_1 = U_1' - U_1 = \frac{3}{2} \nu_1' RT - \frac{3}{2} \nu_1 RT = \frac{3}{2} RT(\nu_1' - \nu_1) = 2150\ \mathrm{J}.$$

Pentru gazul din incinta a doua variația energiei interne este: $\Delta U_2 = U_2' - U_2 = \frac{3}{2} \nu_2' RT_2 - \frac{3}{2} \nu_2 RT = \frac{3}{2} R(\nu_2' T_2 - \nu_2 T) = 12{,}01$ kJ.

2.52. Gazul suferă o transformare izotermă. Cînd pistonul se află la distanța x de suprafața apei avem: $p_0 V_0 = pV$ (1) unde p este presiunea, iar $V = Sh$ noul volum ocupat de gaz. Condiția de echilibru a pistonului se scrie: $pS + F = (p_0 + \rho_0 g x)S$ (2) iar condiția de echilibru pentru vas $pS = [p_0 + \rho_0 g(x - h)]S + Mg$ (3). Din relațiile (1), (2) și (3) rezultă

$$x = \frac{p_0 V_0 \rho_0 g S + Mg F + F^2 - p_0 SF - p_0 SMg}{\rho_0 g S(F + Mg)}.$$

2.53. După încălzirea aerului condițiile de echilibru pentru cele două pistoane sînt:

$$kx + pS_1 - p_0 S_1 - F = 0\ (1),\quad p_0 S_2 + F - pS_2 = 0\ (2),$$

unde F este tensiunea din tijă, x este deformarea resortului, iar p este presiunea finală a aerului.

Aerul evoluează la volum constant încît $\frac{p}{p_0} = \frac{T}{T_0}$. Din (1),(2) și (3) rezultă forța elastică

$$F_e = kx = \frac{p_0(S_2 - S_1)(T - T_0)}{T_0} = 200\ \mathrm{N}.$$

2.2. Principiile termodinamicii

2.54. La încălzirea la presiune constantă,

$$Q_1 = \nu C_p \Delta T_1,$$

iar la răcirea la volum constant,

$$Q_2 = \nu C_V \Delta T_2,$$

de unde,

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{Q_1}{Q_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = 1{,}4.$$

Gazul este biatomic.

2.55. Din relația lui Robert Mayer, $c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$, rezultă $\mu = 32$ kg/kmol, deci este vorba despre oxigen. Din $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1{,}4 = \frac{i+2}{i}$, rezultă $i = 5$. Gazul este biatomic.

2.56. Din ecuația de stare a gazelor, $pV = \frac{m}{\mu} RT$, rezultă că $R = \frac{p\mu}{\rho_0 T}$, unde $\rho_0 = \frac{m}{V}$ iar din relația lui Robert Mayer, $c_p - c_V = \frac{R}{\mu} = \frac{p}{\rho_0 T}$ (1). Știind că $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ (2), din (1) și (2) rezultă că $c_p = \frac{\gamma \cdot p}{(\gamma - 1)\rho_0 T} = 1{,}04$ kJ/kg·K și $c_V = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho_0 T} = 740$ J/kg·K.

2.57. a) $c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{\mu} = \frac{i}{2}\frac{R}{\rho_0 V_0}$; $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu} = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\rho_0 V_0}$, unde $i = 5$; $V_0 = 22{,}4$ m³/kmol; $R = 8310$ J/kmol·K, $c_V = 648{,}57$ J/kg·K; $c_p = 908$ J/kg·K;

b) $c_p - c_V = \frac{R}{\mu}$ (relația lui R. Mayer), $c_p = \gamma c_V$. Din sistemul de ecuații rezultă:

$$c_V = \frac{R}{\mu(\gamma - 1)} = 692{,}5\ \mathrm{J/kg\cdot K};\quad c_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\cdot\frac{R}{\mu} = 969{,}5\ \mathrm{J/kg\cdot K}.$$

2.58. Din ecuația reacției $2H_2 + O_2 = 2H_2O$ se observă că din trei kmoli de gaz biatomic rezultă doi kmoli de gaz triatomic. Atunci, înainte de reacție, $C_p^{\text{amestec}} = 3\cdot\frac{5}{2}R$ și $C_p^{\text{amestec}} = 3\,\frac{7}{2}R$, iar după reacție $C_V^{\text{vapori}} = 2\cdot\frac{6}{2}R$ și $C_p^{\text{vapori}} = 2\cdot\frac{8}{2}R$, de unde $\frac{C_V^{\text{amestec}}}{C_V^{\text{vapori}}} = 1{,}25$ și $\frac{C_p^{\text{amestec}}}{C_p^{\text{vapori}}} = 1{,}3125$.

2.59. a) Numărul de particule crește prin disociere cu αN, unde N este numărul de molecule de hidrogen înainte de disociere. Ecuația de stare a gazului se scrie $pV = (1+\alpha)NkT$, sau $pV = (1+\alpha)\nu RT$, de unde $p = \frac{(1+\alpha)mRT}{\mu V} = 91\cdot 10^3$ N/m².

b) Din condiția ca: $mc_V = m_1c_{V_1} + m_2c_{V_2}$, unde m este masa totală de hidrogen, m_1 este masa de hidrogen molecular, $c_{V_1} = \frac{5}{2}\frac{R}{\mu}$ este căldura specifică la volum constant a hidrogenului molecular, m_2 este masa de hidrogen atomic și $c_{V_2} = \frac{3}{2}\frac{R}{\mu/2}$ este căldura specifică la volum constant a hidrogenului atomic, rezultă că $c_V = (1-\alpha)\frac{5R}{2\mu} + 3\alpha\frac{R}{\mu} = 10{,}9$ kJ/kg · K.

2.60. a) $T = aV^2$, unde a este o constantă. Scriind primul principiu al termodinamicii: $Q = \Delta U + L$ sub forma, $\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \int_{T_1}^{T_2} p\,dV$, unde $p = \frac{\nu RT}{V} = \nu RT^{1/2}a$ și $dV = \frac{1}{2a}T^{-1/2}dT$

rezultă $\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \int_{T_1}^{T_2}\frac{\nu R}{2}\,dT$, sau $\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \frac{\nu R}{2}\Delta T$, de unde $C = C_V + \frac{R}{2}$.

b) Înlocuind în primul principiu al termodinamicii, $Q = \Delta U + L$; $\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \int_{T_1}^{T_2} p\,dV$, unde $V = \frac{b}{T}$;

$$p = \frac{\nu RT}{V} = \frac{\nu RT^2}{b} \text{ și } dV = -\frac{b}{T^2}\,dT. \text{ Deci,}$$

$$\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T + \nu R\int_{T_1}^{T_2} T^2\left(-\frac{1}{T^2}\right)dT, \text{ sau}$$

$\nu C\Delta T = \nu C_V\,\Delta T - \nu R\Delta T$, de unde $C = C_V - R$.

2.61. a) Din căldura $Q = \nu\, C_p(T_2 - T_1)$,

$$T_2 = T_1 + \frac{(\gamma-1)\,Q}{\gamma R} = 1740 \text{ K}.$$

b) Destinderea fiind izobară, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 5{,}8$.

c) Lucrul mecanic, $L = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = 11{,}952$ kJ

2.62. Din reprezentarea în coordonate p — V a celor două cicluri (fig. 2.62 R) se observă că aria închisă de ciclul 1—2—3—1 este mai mare decît aria închisă de ciclul 1—3—4—1. Deci în ciclul 1—2—3—1 lucrul mecanic efectuat este mai mare ca în ciclul 1—3—4—1.

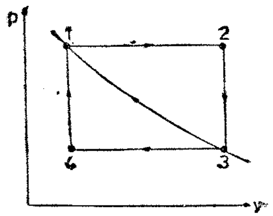

Fig. 2.62. R.

2.63. a) Densitățile gazului din butelie înainte și după umplerea balonului sînt $\rho_1 = \frac{m_1}{V}$ și $\rho_2 = \frac{m_2}{V}$, iar din ecuația de stare $m_1 = \frac{\mu V}{RT_0}p_1$ și $m_2 = \frac{\mu V}{RT_0}p_2$, astfel că $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{p_1}{p_2} = 2$.

b) Numărul de moli din balon este $\nu = \frac{p_0V}{RT_0} = \nu_1 - \nu_2$, unde ν_1 este numărul de moli aflați inițial în butelie, iar ν_2 cei aflați în butelie după umplerea balonului. Din ecuațiile de stare pentru cele două stări ale gazului, $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{p_1}{p_2}$, astfel că $\nu_1 = \nu\,\frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{p_0V}{RT_0}\cdot\frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{2}{3}$ kmol și $\nu_2 = \nu\,\frac{p_2}{p_1 - p_2} = \frac{1}{3}$ kmol.

c) Scriind ecuația transformării izobare, $\frac{V}{T_0} = \frac{V'}{T'}$ rezultă $T' = \frac{V'}{V}T_0 = 330$K. Lucrul mecanic va fi $L = p_0(V' - V) = 0{,}1\,p_0V = 8{,}31\cdot 10^4$J.

d) $\Delta U = \nu\, C_V\,\Delta T = \frac{5}{2}\,\nu R(T' - T_0) = 207750$ J și

$Q = \Delta U + L = 290850$ J.

2.64. a) $Q_p = mc_p \Delta t$, unde $c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}$, i fiind numărul gradelor de libertate (în cazul hidrogenului $i = 5$). Deci, $Q_p = m\frac{i+2}{2}\frac{R}{\mu}\Delta t = 291$ kJ.

b) $U = m c_V \Delta t = m\frac{i}{2}\frac{R}{\mu}\Delta t = 208$ kJ. $L = Q - \Delta U = 83$ kJ.

2.65. Reprezentarea grafică a proceselor este dată în figura 2.65R.

a) $\Delta U = \frac{C_V}{R}(p_2V_2 - p_1V_1) = 3{,}25\cdot 10^6$ J;

b) $L = L_1 + L_2 = p_1(V_2 - V_1) = 0{,}4\cdot 10^6$ J.

c) $Q = L + \Delta U = 3{,}65\cdot 10^6$ J.

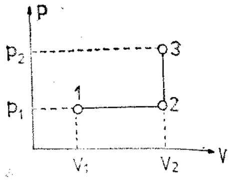

Fig. 2.65.R.

2.66. a) $Q_p = mc_p\Delta T$, unde $c_p = \frac{R}{\mu} + c_V = 14$ kJ/kg·K, deci $Q_p = 140$ kJ, $Q_V = mc_v\Delta T = 98$ kJ.

b) $L = \frac{m}{\mu}R\Delta T = 42$ kJ. Diferența dintre cele două călduri este $Q_p - Q_V = 42$ kJ $= L$. Se observă că diferența dintre cele două călduri este egală cu lucrul mecanic efectuat de gaz în cursul încălzirii izobare.

c) $\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{Q}{mq}$, deci $m_1 = \frac{Q_p}{\eta q} = 5\cdot 10^{-3}$ kg; $m_2 = \frac{Q_V}{\eta q} = 3{,}2\cdot 10^{-3}$ kg.

2.67. Lucrul mecanic în transformarea izotermă este

$$L_T = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}\,dV = \nu RT\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Lucrul mecanic în transformarea adiabatică se calculează analog, adică din $pV^\gamma = p_1V_1^\gamma$ rezultă $p = \frac{p_1V_1^\gamma}{V^\gamma}$ și

$$L_Q = p_1V_1^\gamma\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} = \frac{p_1V_1^\gamma}{1-\gamma}(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) = \frac{\nu RT}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Deci, raportul cerut este egal cu $\frac{L_Q}{L_T} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]}{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} = 1{,}4$ unde $\gamma = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}$. $L_T < L_Q$, deci este mai avantajoasă comprimarea izotermă.

2.68. a) În procesul adiabatic $\Delta U = -L$, iar $\Delta U = \frac{m}{\mu}C_V\Delta T = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}R(T_1 - T_0)$. Temperatura T_1 se obține din ecuația transformării adiabatice $p_0V_0^\gamma = p_1V_1^\gamma$, unde $p_0 = 10^5\frac{N}{m^2}$, iar $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1{,}4$. Se obține: $\Delta U = \frac{5}{2}p_0V_0\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = -2{,}69\cdot 10^6$ J.

b) $L = -\Delta U = 2{,}69\cdot 10^6$ J.

2.69. $L_{12} = p_2(V_1 - V_2) = \nu R(T_1 - T_2)$. Rezultă, $T_1 = \frac{L_{12}}{\nu R} + T_2 = 400$ K. Din ecuația de stare $p_1V_1 = \nu RT_1$ rezultă $p_1 = \frac{\nu RT_1}{V_1} = p_2 = 10^5$ N/m². Lucrul mecanic în transfomarea izotermă este: $L_{23} = \int_{V_2}^{V_3} p\,dV = \nu RT_2\int_{V_2}^{V_3}\frac{dV}{V} = \nu RT_2\ln\left(\frac{V_2}{V_3}\right) = \nu RT_2\ln\left(\frac{p_3}{p_2}\right)$, de unde $\ln\left(\frac{p_3}{p_2}\right) = \frac{L_{23}}{\nu RT_2} = \frac{1}{3}$; $p_3 = p_2\exp\left(\frac{L_{12}}{\nu RT_2}\right) = 1{,}39\cdot 10^5$ N/m².

2.70. a) Gazul suferă o transformare izobară, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, sau $\frac{h}{T_1} = \frac{h+\Delta h}{T_2}$, de unde rezultă $T_2 = \frac{h+\Delta h}{h}T_1 = 360$ K.

b) $L = p(V_2 - V_1) = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)S\Delta h = 154$ J;

c) $Q_u = \nu C_p(T_2 - T_1)$, unde $\left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)V_1 = \nu RT_1$; $C_p = \frac{i+2}{2}R$. Rezultă $Q_u = \left(p_0 + \frac{mg}{S}\right)\cdot\frac{i+2}{2}\cdot\frac{V_1(T_2 - T_1)}{T_1} = 1239$ J; $\Delta U = \nu\frac{i}{2}R(T_2 - T_1) = Q - L = 1085$ J; d) $\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{Q_u}{mq}$ de unde $m = \frac{Q_u}{\eta q} = 4{,}1\cdot 10^{-5}$ kg.

2.71. a) Scriind ecuația transformării adiabatice, $p_A\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma_A} = p_0 V_0^{\gamma_A}$, sau $p_A = p_0\cdot 2^{5/3}$ și $p_B\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\gamma_B} = p_0 V_0^{\gamma_B}$, sau $p_B = p\cdot 2^{7/5}$;

b) $L_A = \frac{p_0V_0}{\gamma_A-1}(2^{\gamma_A-1}-1)$, iar $L_B = \frac{p_0V_0}{\gamma_B-1}(2^{\gamma_B-1}-1)$. Deci,

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{(\gamma_B-1)(2^{\gamma_A-1}-1)}{(\gamma_A-1)(2^{\gamma_B-1}-1)} = 1{,}089.$$

2.72. a) Deoarece $1<n<\gamma=1{,}4$, în coordonate $p-V$ politropa va fi o curbă cuprinsă între o izotermă și o adiabată (fig. 2.72 R).

$$L=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p_1V_1^n\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V^n} = \frac{p_1V_1-p_2V_2}{n-1},$$ unde

$V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1} = 2{,}493\ \mathrm{m}^3$ și $V_2 = V_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}} = 16{,}98\ \mathrm{m}^3$. Deci, $L = 3{,}972$ MJ.

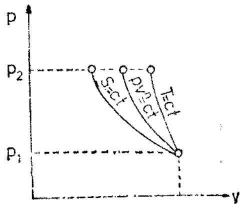

Fig. 2.72. R.

b) $Q = L+\Delta U = \frac{p_1V_1-p_2V_2}{n-1}+\nu C_v(T_2-T_1) = \frac{p_1V_1-p_2V_2}{n-1}+\nu\frac{R}{\gamma-1}\left(\frac{p_2V_2}{\nu R}-\frac{p_1V_1}{\nu R}\right) = (p_1V_1-p_2V_2)\cdot\frac{\gamma-n}{(\gamma-1)(n-1)} = \frac{\gamma-n}{\gamma-1}L = 1{,}98$ J;

c) $Q = \nu C_n(T_2-T_1) = \frac{(p_1V_1-p_2V_2)(\gamma-n)}{(\gamma-1)(n-1)}$, sau

$C_n\left(\frac{p_2V_2}{R}-\frac{p_1V_1}{R}\right) = \frac{(p_1V_1-p_2V_2)(\gamma-n)}{(\gamma-1)(n-1)}$ de unde

$$C_n = R\frac{n-\gamma}{(\gamma-1)(n-1)} = -\frac{5}{2}R = -C_V.$$

2.73. a) $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}(aV+b)\,\mathrm{d}V = \frac{a}{2}(V_2^2-V_1^2)+b(V_2-V_1) = 1150$ J;

b) $\Delta U = \nu C_V\Delta T = \nu\frac{i}{2} R(T_2-T_1) = \frac{i}{2}(p_2V_2-p_1V_1) = \frac{5}{2}[(aV_2+b)V_2-(aV_1+b)V_1] = 3250$ J;

c) $Q=\Delta U+L = 4400$ J.

d) $Q=\nu C\Delta T$ (pentru un proces oarecare), de unde

$$C = \frac{Q}{\nu\Delta T} = \frac{\Delta U+L}{\frac{\Delta U}{C_V}} = C_V\left(1+\frac{L}{\Delta U}\right) = 1{,}35\,C_V = 1{,}35\frac{i}{2} R \approx 3{,}38\, R = 2{,}8\cdot10^4\ \mathrm{J/kmol\cdot K}.$$

2.74. a) Din ecuația de stare se obține volumul $V_1=\frac{\nu RT_1}{p_1}$, iar $V_2 = n V_1 = n\frac{\nu RT_1}{p_1}$. Variația energiei interne a gazului este: $\Delta U = \nu\frac{i}{2} R(T_2-T_1)$, unde $T_1 = aV_1-bV_1^2$, $T_2 = aV_2-bV_2^2 = anV_1-bn^2V_1^2$, iar $T_2-T_1 = a(n-1)V_1 - b(n^2-1)V_1^2$. Din relația $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{2}$ rezultă $i = \frac{2}{\gamma-1}$, și $\Delta U = \frac{R(n-1)}{\gamma-1}V_1[a-b(n+1)V_1]$;

b) $\Delta U=0$ cînd $a = b(n-1)V_1 = b(n-1)\frac{\nu RT_1}{p_1}$.

c) $L = \int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}\mathrm{d}V = \nu Ra(V_2-V_1)-\frac{1}{2}Rb(V_2^2-V_1^2) = \nu RV_1a(n-1)-\frac{1}{2}RbV_1^2(n^2-1)$.

2.75. a) Variația energiei interne depinzînd doar de variația temperaturii, ΔU este aceeași în ambele transformări. Pentru $T = aV^2$: $L_{12} = \int_{V_1}^{V_2}p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}\mathrm{d}V = \nu Ra\int_{V_1}^{V_2}V\mathrm{d}V = \nu Ra(V_2^2-V_1^2)$;

$\Delta U = \nu C_V(T_2-T_1) = \nu C_V a(V_2^2-V_1^2)$, sau $\frac{L_{12}}{\Delta U} = \frac{R}{C_V} = \frac{2}{5}$;

$L_{12} = \frac{2}{5}\Delta U = 80$ J;

$Q_{12} = \Delta U + L_{12} = 280$ J. Pentru transformarea $V = aT^2$:

$$L'_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \int_{V_1}^{V_2}\frac{\nu RT}{V}\mathrm{d}V = \frac{\nu R}{a}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{T} = \frac{\nu R}{\sqrt{a}}\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{V}} = \frac{2\nu R}{\sqrt{a}}(\sqrt{V_2}-\sqrt{V_1}),\quad \Delta U = \nu C_V(T_2-T_1) = \frac{\nu C_V}{\sqrt{a}}(\sqrt{V_2}-\sqrt{V_1}).$$

in împărțire, $\frac{L'_{12}}{\Delta U} = \frac{2R}{C_V} = \frac{4}{5}$; $L'_{12} = \frac{4}{5}\Delta U = 160$ J;

$$Q'_{12} = \Delta U + L'_{12} = 360 \text{ J}.$$

b) În prima transformare,

$= \Delta U + L = \Delta U + \frac{2}{5}\ \Delta U = \frac{7}{5}\Delta U = \frac{7}{5}\ \nu C_V\ \Delta T'$. Pentru trans-

rmarea a doua $Q = \Delta U + L = \Delta U + \frac{4}{5}\Delta U = \frac{9}{5}\ \Delta U = \frac{9}{5}\ \nu C_V \Delta T''$.

eoarece Q este același rezultă că $\frac{7}{5}\ \nu C_V \Delta T' = \frac{9}{5}\ \nu C_V \Delta T''$, sau

$T' = \frac{9}{7}\ \Delta T''$, adică $T' > T''$.

2.76. Notînd cu v viteza sistemului după ciocnire teorema con-
ervării impulsului se scrie: $p = (M + m)v$ (1). Variația energiei
inetice, care duce la creșterea energiei interne a gazului, este:
$\frac{p^2}{2m} - (M + m)\frac{v^2}{2} = \Delta U = 2C_V\ \Delta T(2)$, de unde $\Delta T = \frac{M}{m(M+m)} \cdot \frac{p^2}{4C_V}$.

2.77. Ecuația calorimetrică $Q_c = Q_p$ se scrie:
$mc_{Zn}(t_1 - \theta) = m_a c_a(\theta - t_0) + m_c c_{a1}(\theta - t_0)$, de unde rezultă
$c_{Zn} = 385$ J/kg · K.

2.78. a) Din legea conservării impulsului rezultă $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 =$
$= (m_1 + m_2)\ \bar{v}_f$, sau $m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\Phi = (m_1 + m_2)^2 v_f^2$
de unde

$$v_f = \frac{\sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2m_1 m_2 v_1 v_2 \cos\Phi}}{m_1 + m_2} = 2{,}47 \text{ m/s}.$$

b) Din neconservarea energiei mecanice rezultă:

$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = Q + (m_1 + m_2)\frac{v_f^2}{2}$, sau $Q_c = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} -$

$- (m_1 + m_2)\frac{v_f^2}{2} = 13{,}65$ J. Dar, $\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{(m_1 + m_2)\ c\ \Delta\theta}{Q_c}$, de

unde $\Delta\theta = \frac{\eta Q_c}{(m_1 + m_2)c} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ {}^\circ$C.

2.79. Căldura necesară ridicării temperaturii amestecului cu
Δt la volum constant este $Q = (m_1 + m_2)c_V\Delta t$ (1), unde c_V este căl-
dura specifică a amestecului, m_1 este masa neonului, iar m_2 masa
hidrogenului. Se mai poate scrie: $Q = (m_1 c_{V1} + m_2 c_{V2})\ \Delta t$ (2). Din

(1) și (2) rezultă $c_V = c_{V1}\frac{m_1}{m_1 + m_2} + c_{V2}\frac{m_2}{m_1 + m_2}$, sau $c_V = r_1 c_{V1} +$
$+ r_2 c_{V2} = 2{,}58 \cdot 10^3$ J/kg · K. În mod similar se obține că

$$c_p = c_{p1} r_1 + c_{p2} r_2 = 3{,}73 \cdot 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}.$$

2.80. a) $\rho = \frac{p\mu}{RT} = 3{,}85$ kg/m³;

b) $\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{Pt}{V_0 q}$, unde V_0 se determină din legea gazelor per-
fecte: $V_0 = \frac{pT_0}{p_0 T}\ V$, unde V_0 este volumul ocupat în condiții nor-
male. Atunci, $t = \frac{\eta q p T_0}{P p_0 T} V = 233$ s.

c) Ecuația calorimetrică se scrie: $mc\Delta\theta = \Delta V_0 q$, unde $\Delta V_0 =$
$= V_0 - V'_0$, V'_0 fiind volumul ocupat de gazul rămas după încăl-
zirea apei în condiții normale. Rezultă $\Delta V_0 = V\ \frac{T_0}{T p_0}\ (p - p')$ și
masa $m = \frac{qV(p - p')}{c\Delta\theta T p_0}\ T_0 = 3{,}64$ kg.

2.81. $\eta = \frac{Q_{\text{util}}}{Q_{\text{cons}}} = \frac{m_a\ c_a\ \Delta t}{m_g\ q}$, unde $m_a = \rho_a V = \rho_a Sl = \rho_a\ \frac{\pi d^2}{4} v\tau$;

$m_g = p\ \frac{V\mu}{RT}$. Înlocuind rezultă: $t_2 - t_1 = \frac{4\ \eta p\ V \mu\ q}{RT\ \rho_a\ \pi\ d^2\ v c_a} = 35{,}6$°C,
astfel că $t_2 = t_1 + 35{,}6$°C $= 45{,}7$ °C.

2.82. a) Din figura 2.82 se observă că $\text{tg}\alpha = \frac{p_A}{V_A} = \frac{p_B}{V_B}$, adică
$p_A = V_A\ \text{tg}\alpha = 10^5$ N/m²; $p_B = V_B\ \text{tg}\alpha = 2 \cdot 10^5$ N/m². Din legea ga-
zelor perfecte $p_A V_A = \nu RT_A$, rezultă $\nu = \frac{p_A V_A}{RT_A} = 0{,}04$ moli. Ana-
log, $T_B = \frac{p_B V_B}{\nu R} = 1203{,}4$ K și $T_C = \frac{p_C V_C}{\nu R} = \frac{p_A V_B}{\nu R} = 601{,}6$K.

b) Dreapta care trece prin origine are ecuația $p = aV$ astfel
încît,

$$L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p\ dV = \int_{V_A}^{V_B} aV\ dV = \frac{a}{2}\ (V_B^2 - V_A^2) = 150\text{J};$$

$L_{BC} = 0$; $L_{CA} = p_A(V_A - V_C) = -100$ J; $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA} = 50$ J. Se putea calcula lucrul total și cu ajutorul ariei triunghiului ABC, adică

$$L_{tot} = S_{ABC} = \frac{(p_B - p_A)(V_B - V_A)}{2} = 50 \text{ J}.$$

c) $\Delta U_{AB} = \nu C_V(T_B - T_A) = 750{,}7$ J; $\Delta U_{BC} = \nu C_V(T_C - T_B) = -500$ J;
$\Delta U_{CA} = \nu C_V(T_A - T_C) = -250{,}7$ J; $\Delta U_{tot} = \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0$;

d) $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + L_{AB} = 900{,}7$ J; $Q_{BC} = \Delta U_{BC} + L_{BC} = -500$ J; $Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = -350{,}7$ J; $\Delta S_{tot} = 0$ (ciclul este închis).

2.83. a) Deoarece $C_V = \frac{3}{2} R$ și $C_p = C_V + R = \frac{5}{2} R$ rezultă că $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$. Pentru transformarea adiabatică AB, $p_A V_A^\gamma = p_B V_B^\gamma$, de unde $p_A = p_B \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^\gamma = 31{,}56 \cdot 10^5$ N/m²; $L_{AB} = \frac{p_A V_A - p_B V_B}{\gamma - 1} = 3530$ J; $Q_{AB} = 0$; $\Delta U_{AB} = Q_{AB} - L_{AB} = -3530$ J. Pentru transformarea izobară, BC, $L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = -400$ J; $Q_{BC} = \nu C_p(T_C - T_B) = \frac{5}{2}\nu R(T_C - T_B) = \frac{5}{2}(p_C V_C - p_B V_B) = -1000$ J; $\Delta U_{BC} = Q_{BC} - L_{BC} = -600$ J. Pentru transformarea izotermă, CD, $L_{CD} = \nu R T_C \ln \frac{V_D}{V_C} = p_C V_C \ln \frac{V_D}{V_C} = -554{,}5$ J.; $Q_{CD} = L_{CD} = -554{,}5$ J; $\Delta U_{CD} = 0$. Pentru transformarea izocoră DA, $\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_D}{T_D}$, de unde $p_D = p_A \frac{T_D}{T_A} = 4 \cdot 10^5$ N/m²; $L_{DA} = 0$; $Q_{DA} = \nu C_V(T_A - T_D) = \nu \frac{3}{2} R(T_A - T_D) = \frac{3}{2} V_A(p_A - p_D) = 4130$ J; $\Delta U_{DA} = Q_{DA} - L_{DA} = 4130$ J;

b) Lucrul mecanic total efectuat pe un ciclu este $L_{tot} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA} = 2 \cdot 566{,}7$ J; $Q_1 = Q_{DA} = 4130$ J; $Q_2 = Q_{BC} + Q_{CD} = 1554{,}5$ J;

c) Randamentul ciclului este: $\eta = \frac{L_{tot}}{Q_1} = 0{,}62 = 62\%$.

2.84. a) $F_{tr} = G_t + F_f + F_a = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + ma = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) + \frac{m}{t}(v_2 - v_1) = 2377{,}3$ N;

b) $P_m = F_{tr} v_m = F_{tr} \cdot \frac{(v_1 + v_2)}{2} = 29716{,}25$ W; $P_{max} = F_{tr} v_{max} = F_{tr} v_2 = 47546$ W;

c) $\eta_c = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{Q_1} = \frac{P_m t}{Q_1}$, de unde

$Q_1 = \frac{P_m t}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = 12{,}4$ MJ; $Q_2 = Q_1 - L = Q_1 - P_m t = 10$ MJ;

d) $\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{Q_1}{V_m q} = \frac{Q_1}{\frac{m}{\rho_0} \cdot q}$, de unde $m = \frac{\rho_0 Q_1}{\eta q} = 16{,}36$ kg.

2.85. a) $\eta = \frac{P_u}{P_c} = \frac{P_u}{\frac{mq}{t}} = \frac{P_u}{D_m q}$; $P_u = \eta D_m q = 3750$ W;

b) $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1}$; deci $T_1 = \frac{\Delta T}{\eta} = 700$ K; $T_2 = T_1 - \Delta T = 280$ K; $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} R T_2$; $V_2 = \frac{m R T_2}{\mu p_2} = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ m³;

c) $\eta = \frac{L}{Q_1} = \frac{P_u t}{Q_1}$; $Q_1 = \frac{P_u t}{\eta} = 11{,}25$ MJ; $Q_1 = L + Q_2$; $Q_2 = Q_1 - P_u t = 4{,}5$ MJ.

2.86. a) Randamentul dinamului este $\eta_2 = \frac{P_{u2}}{P_{u1}}$; $P_{u1} = \frac{P_{u2}}{\eta_2} = 1{,}1 \cdot 10^5$ W. Randamentul mașinii termice este $\eta_1 = 0{,}8\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 0{,}53$;

b) $P_p = P_c - P_{u1}$, unde $\eta_1 = \frac{P_{u1}}{P_c}$, adică $P_p = P_{u_1}\left(\frac{1}{\eta_1} - 1\right) = 9{,}7 \cdot 10^4$ W;

c) $\eta_1 = \frac{L_u}{Q_1} = \frac{P_{u1} t}{mq}$; $m = \frac{P_{u1} t}{\eta_1 q} = 23{,}79$ kg.

2.87. a) $\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_2 + \Delta T} = 52\%$;

$\eta_c = \frac{P_u}{P_c} = \frac{P_u}{\frac{mq}{t}} = \frac{P_u}{D_m q}$, de unde $P_u = \eta_C D_m q = 1625$ W;

b) $V_1 = \frac{\nu R T_1}{p_1} = \frac{m}{\mu}\cdot\frac{R(T_2+\Delta T)}{p_1} = 0{,}012\ \mathrm{m^3}$;

c) $\Delta v = v_1 - v_2 = \sqrt{\frac{3R}{\mu}T_1} - \sqrt{\frac{3R}{\mu}T_2} = \sqrt{\frac{3R}{\mu}}(\sqrt{T_1}-\sqrt{T_2}) = \sqrt{\frac{3R}{\mu}}(\sqrt{T_2+\Delta T}-\sqrt{T_2}) = 197{,}44$ m/s;

d) $Q_1 = mq = D_m t q = 22{,}5$ MJ; $\eta_C = 1-\frac{Q_2}{Q_1} = 1-\frac{T_2}{T_1}$; $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}$, de unde $Q_2 = \frac{T_2}{T_1}Q_1 = 11{,}78$ MJ.

2.88. Pentru ciclul din figura 2.88R randamentul este $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{Q_{23}-Q_{14}}{Q_{23}} = 1-\frac{T_4-T_1}{T_3-T_2}$.

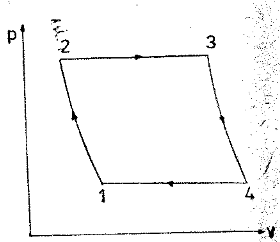

Fig. 2.88.R.

Ecuațiile transformărilor sînt:

$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$ (1); $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$ (2); $T_3V_3^{\gamma-1} = T_4V_4^{\gamma-1}$ (3);

$\frac{V_4}{T_4} = \frac{V_1}{T_1}$ (4). Din (1), $T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1\,\varepsilon^{\gamma-1}$.

Înmulțind (2) cu (4) membru cu membru și folosind (3) rezultă că $T_4 = T_3\,\varepsilon^{1-\gamma}$. Deci,

$$\eta = 1 - \frac{T_4}{T_3}\cdot\frac{1-\frac{T_1}{T_4}}{1-\frac{T_2}{T_3}} = 1-\varepsilon^{1-\gamma} = 0{,}475.$$

2.89. Ciclul Carnot, format din două adiabate și două izoterme, este reprezentat în coordonate $p-V$ în figura 2.89R.

a) $\eta = 1-\frac{T_1}{T_2}$. Scriind ecuația dilatării adiabatice 3 — 4, $T_2V_3^{\gamma-1} = T_1V_4^{\gamma-1}$, de unde $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1}$ și $\eta = 1-\left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} = 0{,}059$;

b) $\eta = 1-\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2-T_1}{T_2}$. Scriind lucrul mecanic în comprimarea adiabatică,

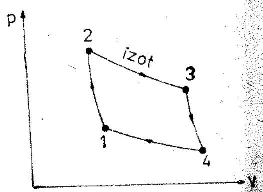

Fig. 2.88.R.

$L = \frac{p_2V_2-p_1V_1}{\nu(\gamma-1)} = \frac{\nu RT_2-\nu RT_1}{\nu(\gamma-1)}$, rezultă că $T_2-T_1 = \frac{L(\gamma-1)}{R}$ și $\eta = \frac{L(\gamma-1)}{RT_2} = 0{,}24$.

2.90. a) Randamentul ciclului este $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = 1-\frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1-\frac{Q_{61}}{Q_{23}+Q_{45}} = 1-\frac{\nu RT_3\ln\frac{V_6}{V_1}}{\nu RT_1\ln\frac{V_3}{V_2}+\nu RT_2\ln\frac{V_5}{V_4}}$. Din enunț, $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_5}{V_4} = k$. Scriind ecuațiile celor șase transformări, $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$; $p_2V_2 = p_3V_3$; $p_3V_3^\gamma = p_4V_4^\gamma$; $p_4V_4 = p_5V_5$; $p_5V_5^\gamma = p_6V_6^\gamma$; $p_6V_6 = p_1V_1$ și înmulțind toți membrii stîngi și toți membrii drepți rezultă că $\frac{V_1}{V_6}\cdot\frac{V_3}{V_2}\cdot\frac{V_5}{V_4} = 1$, de unde $\ln\frac{V_3}{V_2}+\ln\frac{V_5}{V_4} = \ln\frac{V_6}{V_1}$. Deci,

$$\eta = 1-\frac{T_3\left(\ln\frac{V_3}{V_2}+\ln\frac{V_5}{V_4}\right)}{T_1\ln\frac{V_3}{V_2}+T_2\ln\frac{V_5}{V_4}} = 1-\frac{2T_3\ln k}{(T_1+T_2)\ln k} = 1-\frac{2T_3}{T_1+T_2}.$$

b) Lucrul mecanic efectuat de-a lungul ciclului este:

$$L = Q_{abs}-Q_{ced} = \nu R\left[T_1\ln\frac{V_3}{V_2}+T_2\ln\frac{V_5}{V_4}-T_3\ln\frac{V_6}{V_1}\right] = \nu R(T_1+T_2-2T_3)\ln k.$$

2.91. În coordonate $p-V$ ciclul este un dreptunghi (fig. 2.91R). Lucrul mecanic efectuat de gaz este egal cu aria dreptunghiului format de ciclu în coordonate $p-V$; $L = p_{min}\cdot V_{min} = 5\cdot10^4$ J. Randamentul $\eta = \frac{L}{Q_{primit}}$, unde $Q_{primit} = Q_{12}+Q_{23} = \nu C_V(T_2-T_1)+\nu C_p(T_3-T_2)$, unde $T_1 = \frac{p_{min}V_{min}}{\nu R}$; $T_2 = \frac{p_{max}V_{min}}{\nu R} = \frac{2p_{min}V_{min}}{\nu R}$ și $T_3 = \frac{p_{max}V_{max}}{\nu R} = \frac{4p_{min}V_{min}}{\nu R}$. Atunci, $Q_{primit} = \nu C_V\frac{p_{min}V_{min}}{\nu R}+2\nu C_p\frac{p_{min}V_{min}}{\nu R}$, iar $\eta = \frac{R}{C_V+2C_p} = \frac{R}{\frac{R}{\gamma-1}+\frac{2\gamma R}{\gamma-1}} = \frac{\gamma-1}{2\gamma+1} = 0{,}105$, unde $\gamma = 1{,}4$, hidrogenul fiind un gaz biatomic.

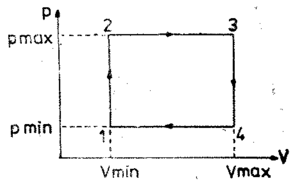

Fig. 2.91.R.

2.92. a) Lucrul mecanic efectuat de gaz în ciclul din figura 2.92R este egal cu $L = L_{12} + L_{23} + L_{31} = \nu R T_{max} \ln a + p_1(V_1 - V_3) = \nu R T_{max} \ln a + \nu R(T_{min} - T_{max})$. Din ecuația transformării izobare, $\frac{V_1}{T_{min}} = \frac{V_3}{T_{max}}$ rezultă că $T_{min} = \frac{1}{a} T_{max}$. Atunci, $L = \nu R T_{max}\left(\ln a - \frac{a-1}{a}\right) = 1{,}284 \cdot 10^6 J$. Randamentul

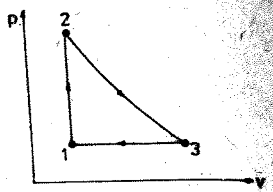

Fig. 2.92.R.

$$\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{\nu R T_{max}\left(\ln a - \frac{a-1}{a}\right)}{\nu R T_{max} \ln a + \nu C_V(T_{max} - T_{min})} =$$

$$= \frac{(\gamma - 1)[a \ln a - (a - 1)]}{a(\gamma - 1)\ln a + a - 1} = 0{,}13, \text{ unde } C_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \text{ iar } \gamma = 1{,}66,$$

pentru gazul monoatomic;

b) $\eta_C = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{a} = 0{,}5$ și $\frac{\eta}{\eta_C} = 0{,}26$.

2.93. În figura 2.93R este reprezentat ciclul în coordonate $p - V$. Randamentul ciclului este egal cu:

$$\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{p_2 V_1 \ln \frac{V_3}{V_1} + p_1(V_1 - V_3)}{\nu C_V(T_2 - T_1) + p_2 V_1 \ln \frac{V_3}{V_1}} =$$

$$= \frac{\nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_1} + \nu R T_1\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)}{\frac{\nu R T_1}{\gamma - 1}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_1}} = \frac{\ln \frac{V_3}{V_1} + \frac{T_1}{T_2}\left(1 - \frac{V_3}{V_1}\right)}{\frac{1}{\gamma - 1}\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) + \ln \frac{V_3}{V_1}}.$$

Din ecuația transformării izocore $1 - 2$, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$ (1), iar din ecuația transformării izoterme $2 - 3$, $\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_2}{p_1}$ (2). Înlocuind (1) și (2) în expresia randamentului rezultă

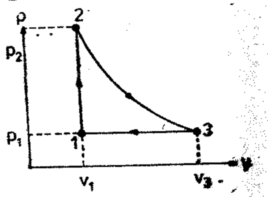

Fig. 2.93.R.

$$\eta = \frac{\ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}\left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)}{\frac{1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{p_1}{p_2}\right) + \ln \frac{p_2}{p_1}} = 0{,}133.$$

2.94. a) Lucrul mecanic efectuat de gaz este $L = p_1(V_1 - V_0) + \frac{p_1 V_1 - p_4 V_2}{\gamma - 1} + p_0(V_0 - V_2)$. Din ecuația transformării adiabatice, $p_4 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$ și $L = p_1(V_1 - V_0) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right] + p_0(V_0 - V_2) = 1920$ J;

b) $$\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{p_1(V_1 - V_0) + p_0(V_0 - V_2) + \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]}{\nu C_V(T_2 - T_1) + \nu C_p(T_3 - T_2)} =$$

$$= \frac{(\gamma - 1)\left[p_1(V_1 - V_0) + p_0(V_0 - V_2) + p_1 V_1\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right]\right]}{(p_1 - p_0)V_0 + \gamma p_1(V_1 - V_0)} = 0{,}2976,$$

unde $T_1 = \frac{p_0 V_0}{\nu R}$, $T_2 = \frac{p_1 V_0}{\nu R}$, $T_3 = \frac{p_1 V_1}{\nu R}$, $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$, $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$.

2.95. $\varepsilon = \frac{Q_{ced}}{Q_{abs} - Q_{ced}} = \frac{\nu C_p(T_3 - T_2)}{\nu C_p(T_4 - T_1) - \nu C_p(T_3 - T_2)} = \frac{1}{\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} - 1}$ (1).

Din ecuația procesului adiabatic $1 - 2$, $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$ (2), iar din ecuația procesului adiabatic $3 - 4$, $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$ (3). Din (2) și (3), $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$ și $\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$. Deci, $\varepsilon = \frac{1}{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(\gamma - 1)/\gamma} - 1} = 2{,}7$ și

$$\eta = \frac{1}{\varepsilon + 1} = 0{,}27.$$

2.96. $\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{\nu C_p(T_4 - T_1)}{\nu C_V(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$ (1). Din ecuația izobarei $1 - 4$, $\frac{T_4}{T_1} = \frac{V_4}{V_1} = \beta$(2), iar din ecuația izocorei, $2 - 3$, $\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = \alpha$(2). Înlocuind (2) și (3) și $T_1 = \delta T_2$ în (1) rezultă că $\eta = 1 - \gamma\,\delta\,\frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$.

2.97. $\eta = \frac{L}{Q_{abs}} = \frac{Q_{abs} - Q_{ced}}{Q_{abs}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}}$, unde $Q_{23} = \nu C_p(T_3 - T_2)$ şi $Q_{41} = \nu C_V(T_1 - T_4)$. Deci $\eta = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$ **(1). Scriind** ecuaţiile transformărilor : $\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_3}{T_3}$ (2) şi $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_1^{\gamma-1}$ **(3)** rezultă că $T_3 = \rho T_2$ şi $T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \rho T_2 \left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right)^{\gamma-1}$. **Din** ecuaţia transformării $1-2$, $T_2 = T_1 \varepsilon^{\gamma-1}$. Atunci,

$$\eta = 1 - \frac{T_1\rho - T_1}{T_1\rho^{\gamma-1} - T_1\varepsilon^{\gamma-1}} = 1 - \frac{\rho^{\gamma} - 1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}(\rho - 1)} = 0{,}53.$$

2.98. a) În coordonate $p - V$ ciclul este **reprezentat în figura** 2.98R;

b) Randamentul ciclului va fi :

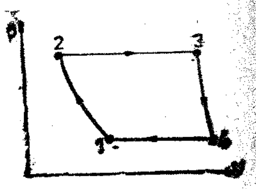

Fig. 2.98. R.

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{\nu C_p(T_4 - T_1) + \nu R T_1 \ln\frac{p_2}{p_1}}{\nu C_p(T_3 - T_2)} =$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{T_4}{T_2} - 1\right) + \frac{\gamma - 1}{\gamma}\ln\frac{p_2}{p_1}}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \text{ (1), deoarece}$$

$T_2 = T_1$ şi $\frac{R}{C_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$. **Din ecuaţia izobarei 2 — 3,** $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \rho$ (2), iar din ecuaţia adiabatei $3 - 4$, $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} = \beta^{(1-\gamma)/\gamma}$ **(3)**, deoarece $p_2 = p_3$ şi $p_4 = p_1$. Putem scrie că $\frac{T_4}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} = \beta^{(1-\gamma)/\gamma}\rho$ **(4).**

Înlocuind (2),(3) şi (4) în (1) rezultă $\eta = 1 - \frac{(\gamma - 1)\ln\beta - (1 - \rho\beta^{(1-\gamma)/\gamma})}{(\rho - 1)}$ **(5)**;

c) În (5) $\rho = \delta$ şi $\eta = 1 - \frac{(\gamma - 1)\ln\beta - (1 - \delta\beta^{(1-\gamma)/\gamma})}{(\delta - 1)}$.

2.99. Randamentul are expresia : $\eta = 1 - \frac{Q_{cedat}}{Q_{primit}} =$

$$= 1 - \frac{\nu C_V(T_4 - T_1)}{\nu C_V(T_5 - T_2) + \nu C_p(T_3 - T_5)} =$$

$$= 1 - \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\left(\frac{T_5}{T_2} - 1\right) + \gamma\frac{T_5}{T_2}\left(\frac{T_3}{T_5} - 1\right)} \cdot \frac{T_1}{T_2},$$ unde $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$. Din ecuaţia transformării izocore $4 - 1$, $\frac{T_4}{T_1} = \frac{p_4}{p_1}$ (1) şi împărţind ecuaţiile transformărilor adiabatice $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$ şi $p_3 V_3^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma}$ şi ţinînd cont că $V_1 = V_4$ rezultă că $\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma}$ (2). Dar, $p_3 = p_5$ şi $V_2 = V_5$, deci (2) se mai poate scrie $\frac{p_4}{p_1} = \lambda\rho^{\gamma}$ (3). Din (1) şi (3) rezultă că $\frac{T_4}{T_1} = \lambda\rho^{\gamma}$ (4). Din ecuaţia transformării izocore $2 - 5$, $\frac{T_5}{T_2} = \frac{p_5}{p_2} = \lambda$ (5), iar din ecuaţia transformării izobare $5-3$, $\frac{V_3}{V_5} = \frac{T_3}{T_5} = \rho$(6). Din ecuaţia adiabatei $1-2$, $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \varepsilon^{1-\gamma}$ (7). Înlocuind (4), (5) şi (6) în expresia randamentului,

$$\eta = 1 - \frac{\lambda\rho^{\gamma} - 1}{(\lambda - 1) + \gamma\lambda(\rho - 1)} \cdot \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}.$$

b) Dacă $\rho = 1$, $\eta_{Otto} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$; şi dacă $\lambda = 1$, $\eta_{Diesel} = 1 - \frac{\rho^{\gamma} - 1}{\gamma(\rho - 1)\varepsilon^{\gamma-1}}$.

2.100. a) Conform figurii 2.100 aR,

$$\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{\nu C_p(T_4 - T_1)}{\nu C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{p_1(V_4 - V_1)}{p_2(V_3 - V_2)} =$$

$$= 1 - \frac{p_{min}}{p_{max}} \cdot \frac{V_4\left(1 - \frac{V_1}{V_4}\right)}{V_3\left(1 - \frac{V_2}{V_3}\right)}.$$ Scriind ecuaţiile transformărilor adiabatice, $p_1 V_1^{\gamma} = p_2 V_2^{\gamma}$ şi $p_1 V_4^{\gamma} = p_2 V_3^{\gamma}$, rezultă că $\frac{V_1}{V_4} = \frac{V_2}{V_3}$, deci $\eta = 1 - \frac{1}{b}\frac{V_4}{V_3}$. Dar, din ecuaţia transformării adiabatice $p_1 V_4^{\gamma} = p_2 V_3^{\gamma}$ rezultă că $\frac{V_4}{V_3} = b^{1/\gamma}$ şi $\eta = 1 - b^{1/\gamma - 1}$;

b) Conform figurii 2.100 bR, $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} =$

$$= \frac{\nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2} + \nu R T_1 \ln \frac{V_1}{V_4}}{\nu C_V (T_2 - T_1) + \nu R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}} = \frac{(\gamma - 1) \ln a (T_2 - T_1)}{T_2 - T_1 + (\gamma - 1) T_2 \ln a},$$

deoarece $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1}$;

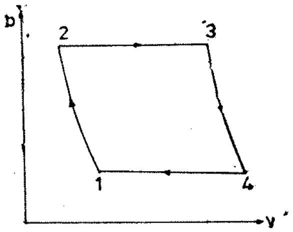

Fig. 2.100.a.R.

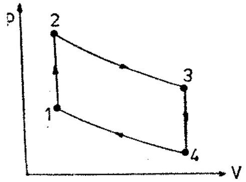

Fig. 2.100.b.R.

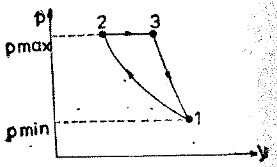

Fig. 2.100.c.R.

c) Conform figurii 2.100 cR, $\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} =$

$= 1 - \frac{\nu R T_1 \ln \frac{p_2}{p_1}}{\nu C_p (T_3 - T_1)}$, unde $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ şi scriind ecuaţia transformării adiabatice, $p_{min}^{1-\gamma} T_1^{\gamma} = p_{max}^{1-\gamma} T_3^{\gamma}$, rezultă că $T_3 = b^{(\gamma-1)/\gamma} T_1$.

Deci, $\eta = 1 - \frac{(\gamma - 1) \ln b}{\gamma (b^{(\gamma-1)/\gamma} - 1)}$.

2.101. Ciclul este reprezentat în coordonate $p - V$ în figura 2.101 R. Randamentul, $\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 - \frac{\nu C_p (T_3 - T_1)}{\nu C_V (T_2 - T_1)} =$

$= 1 - \gamma \frac{\frac{T_3}{T_1} - 1}{\frac{T_2}{T_1} - 1}$. Din ecuaţia transformării

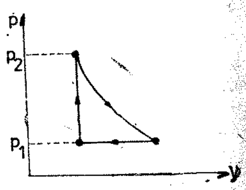

Fig. 2.101.R.

izocore $1 - 2$, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}$ (1), iar din ecuaţia transformării

adiabatice $2 - 3$, $\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$, adică $\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \cdot \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}$ (2). Înlocuind (1) şi (2) în expresia randamentului

rezultă $\eta = 1 - \gamma \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma} - 1}{\frac{p_2}{p_1} - 1} = 0{,}165$.

2.102. a) $L = p_2(V_3 - V_2) + p_1(V_1 - V_4) = \nu R (T_3 - 2 T_2 + T_1) = \nu R (T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3})$, deoarece, scriind ecuaţiile celor două izobare, $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_4}{T_2}$ şi $\frac{V_1}{T_2} = \frac{V_4}{T_3}$, rezultă că $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_2}{T_3}$, adică $T_2 = \sqrt{T_1 T_3}$. În cazul numeric considerat, $L = 1{,}662$ MJ;

b) $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{\nu R (T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3})}{\nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2)} =$

$$= \frac{(\gamma - 1)\left(1 + \frac{T_3}{T_1} - 2\sqrt{\frac{T_3}{T_1}}\right)}{\sqrt{\frac{T_3}{T_1}}(1 - \gamma) + \frac{T_3}{T_1} - 1} = 0{,}105, \text{ deoarece } \frac{T_3}{T_1} = 4.$$

2.103. $\eta = 1 - \frac{Q_{ced}}{Q_{abs}} = 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}} = 1 + \frac{\Delta U_{34}}{\Delta U_{12}} =$

$= 1 + \frac{a(V_4 T_4^4 - V_3 T_3^4)}{a(V_2 T_2^4 - V_1 T_1^4)} = 1 - \frac{V_3 T_3^4}{V_1 T_2^4} \cdot \frac{1 - (T_4^4 / T_3^4)}{1 - (T_1^4 / T_2^4)}$ (1). Scriind ecuaţiile transformărilor adiabatice $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ şi $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$ şi ţinînd cont că $V_1 = V_2$ şi $V_3 = V_4$ rezultă că $\frac{T_1}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$. Deci, (1) devine $\eta = 1 - \frac{V_3}{V_1}\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^4$ (2). Din ecuaţia $T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$ şi deoarece $V_2 = V_1$ rezultă că $\frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1}$. Atunci $\eta = 1 - \varepsilon^{5-4\gamma} = 0{,}5$.

2.104. a) Lucrul mecanic este egal cu aria ciclului ABCD, care poate fi scrisă ca diferenţa între ariile FBCE şi FADE, adică $L = \frac{1}{2}(p_C - p_B)(2V_A - V_A) - \frac{1}{2}(p_D - p_A)(2V_A - V_A) = \frac{1}{2} V_A (p_C -$

$- p_D + p_A) = \frac{1}{2} V_A[2V_A \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - V_A \operatorname{tg}(\alpha + \beta) - 2V_A \operatorname{tg}\alpha +$
$V_A \operatorname{tg}\alpha] = \frac{1}{2} V_A^2[\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha]$.

b) Căldura absorbită este $Q = Q_{AB} + Q_{BC} = C_V(T_B - T_A) + C(T_C - T_B)$, unde $T_A = \frac{p_A V_A}{R} = \frac{V_A^2 \operatorname{tg}\alpha}{R}$, $T_B = \frac{p_B V_B}{R} = \frac{V_A^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{R}$ și $T_C = \frac{p_C V_C}{R} = \frac{4V_A^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{R}$. Deci,
$= \frac{V_A^2}{\gamma - 1}[\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha] + 2R \cdot \frac{3V_A^2}{R} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{V_A^2}{\gamma - 1} \cdot$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta)(6\gamma - 5) - \operatorname{tg}\alpha]$.

c) Randamentul ciclului este $\eta = \frac{L}{Q} = \frac{(\gamma-1)[\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha]}{2[\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(6\gamma-5) - \operatorname{tg}\alpha]}$.

d) Pentru ca punctele B și D să se găsească pe aceeași izotermă rebuie ca $p_B V_B = p_D V_D$, adică $V_A^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4V_A^2 \operatorname{tg}\alpha$, sau $g(\alpha + \beta) = 4\operatorname{tg}\alpha$, ceea ce se poate scrie sub forma $\operatorname{tg}\beta = \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

e) Randamentul ciclului Carnot va fi :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_C} = 1 - \frac{p_A V_A}{p_C V_C} = 1 - \frac{V_A^2 \operatorname{tg}\alpha}{4V_A^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{4\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}.$$

Trebuie arătat că $\frac{4\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha}{4\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} > \frac{(\gamma - 1)[\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha]}{2[\operatorname{tg}(\alpha + \beta)(6\gamma - 5) - \operatorname{tg}\alpha]}$ adică $25{,}6 \frac{\operatorname{tg}^2(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 13{,}2 \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha} + 1 > 0$, care este adevărat deoarece $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) > \operatorname{tg}\alpha$.

2.105. a) Randamentul $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{L_{AB} + L_{BC} + L_{CD} + L_{DA}}{Q_{AB} + Q_{BC}}$.

Ecuația dreptei AB este $p = V\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ și atunci $L_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p \, dV =$
$= \frac{1}{2}(V_B^2 - V_A^2)\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; $L_{BC} = a\nu RT_A \ln \frac{V_C}{V_B}$; $L_{CD} = \int_{V_C}^{V_D} p \, dV =$
$= \int_{V_C}^{V_D} V \operatorname{tg}\alpha \, dV = \frac{1}{2}(V_D^2 - V_C^2) \operatorname{tg}\alpha$ și $L_{DA} = \nu RT_A \ln \frac{V_A}{V_D}$. Din

ecuația transformării DA, $p_D V_D = p_A V_A = \nu RT_A$, sau $V_D^2 \operatorname{tg}\alpha = V_A^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \nu RT_A$ rezultă $V_A = \sqrt{\frac{\nu RT_A}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}}$ și $V_D = \sqrt{\frac{\nu RT_A}{\operatorname{tg}\alpha}}$.
Din ecuația transformării BC: $p_B V_B = p_C V_C = a\nu RT_1$, sau $V_B^2 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = V_C^2 \operatorname{tg}\alpha = a\nu RT_A$, rezultă $V_B = \sqrt{\frac{a\nu RT_A}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}}$ și $V_C = \sqrt{\frac{a\nu RT_A}{\operatorname{tg}\alpha}}$.
Deci, lucrul mecanic total va fi egal cu $L = \left(\frac{a\nu RT_A}{2\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} - \frac{\nu RT_A}{2\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}\right) \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \beta) + a\nu RT_A \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha}} + \left(\frac{\nu RT_A}{2\operatorname{tg}\alpha} - \frac{a\nu RT_A}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha + \nu RT_A \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}} = \nu RT_A(a - 1) \cdot \ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha}}$. Căldura primită va fi $Q_{primit} = Q_{AB} + Q_{BC} = \nu C(T_B - T_A) + a\nu RT_A \ln \frac{V_C}{V_B} = \nu CT_A(a - 1) + a\nu RT_A \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha}}$. Randamentul va fi egal cu

$$\eta = \frac{(a - 1)\ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha}}}{2(a - 1) + a\ln\sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha}}}.$$

b) Pentru ca punctele B și D să se afle pe aceeași adiabată trebuie ca $p_B V_B^{\gamma} = p_D V_D^{\gamma}$, sau $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = \left(\frac{V_D}{V_B}\right)^{\gamma+1}$, de unde $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}\alpha} = a^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$.

2.106. Randamentul este $\eta = \frac{L}{Q_{primit}}$, unde L este egal cu aria triunghiului ABC, adică $L = \frac{(V_C - V_A)(p_B - p_A)}{2} = \frac{(a-1)(b-1)p_A V_A}{2}$, iar căldura primită $Q_{primit} = Q_{AB} + Q_{BC} = \nu C_V(T_B - T_A) + \nu C(T_C - T_B) = \frac{\nu R}{\gamma - 1}\left(\frac{p_B V_B}{\nu R} - \frac{p_A V_A}{\nu R}\right) + \nu R\left(\frac{p_C V_C}{\nu R} - \frac{p_B V_B}{\nu R}\right) = p_A V_A \frac{a - 1 + (\gamma - 1)(b^2 - a)}{\gamma - 1}$. Deci,

$= \frac{(a-1)(b-1)(\gamma-1)}{2[(a-1)+(\gamma-1)(b^2-a)]}$. În cazul numeric considerat $= \frac{3}{5}$, deci $\eta = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} = 0{,}25$;

Randamentul ciclului Carnot va fi $\eta_C = 1 - \frac{T_A}{T_B} = 1 - \frac{p_A V_A}{p_B V_B} = 1 - \frac{1}{a}$.

ı cazul numeric considerat, $\eta_C = 0{,}67$.

2.107. În coordonate pV ciclul este ·prezentat în figura 2.107R. Randamen-ul $\eta = \frac{L}{Q_{primit}} = \frac{\text{aria dreptunghiului}}{Q_{primit}} = \frac{p_1 V_1}{\nu C_V (T_2 - T_1) + \nu C_p (T_3 - T_2)} = \frac{p_1 V_1 (\gamma - 1)}{p_1 V_1 + \gamma 2 p_1 V_1} = \frac{\gamma - 1}{1 + 2\gamma} = 0{,}105.$

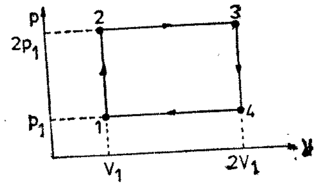

Fig. 2.107.R.

2.108. a) Energia maximă pe care o poate transfera sistemul sub formă de lucru mecanic este egală cu lucrul mecanic efectuat de o mașină Carnot care funcționează între cele două surse de căldură T_a și T_b. Deci, $L = Q_1 - Q_2$, unde Q_1 este căldura primită de la sursa caldă, adică $Q_1 = mc(T_a - T_0)$, iar Q_2 este căldura cedată de sistem sursei reci, deci $Q_2 = mc(T_0 - T_b)$, unde T_0 este temperatura finală. Pentru a-l afla pe T_0 ținem cont că în cazul unui ciclu Carnot $\frac{dQ_1}{T_1} = \frac{dQ_2}{T_2}$, sau $\int_{T_a}^{T_0} \frac{dT_1}{T_1} = \int_{T_0}^{T_b} \frac{dT_2}{T_2}$, adică $\ln\frac{T_0}{T_a} = \ln\frac{T_b}{T_0}$, de unde $T_0 = \sqrt{T_a T_b}$. Atunci, $L = mc(T_a + T_b - 2\sqrt{T_a T_b}) = 28{,}7$ kJ.

b) Energia ce nu poate fi transferată în exterior sub formă de lucru meanic este egală cu variația energiei interne : $\Delta U = Q - L = mc(T_a - T_b) - mc(T_a + T_b - 2T_0) = 2mc(\sqrt{T_a T_b} - T_b) = 371$ kJ.

2.109. Scriind expresiile celor dpuă principii ale termodinamicii sub formă diferențială, $dQ = dU + p dV$ și $dQ = T dS$, eliminînd căldura elementară dQ rezultă relația $dS = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV$, unde $dU = \nu C_V dT$ și $\frac{p}{T} = \frac{\nu R}{V}$, din ecuația termică de stare. Deci,

$dS = \nu C_V \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V}$. Integrînd între o stare 1 (T_1, V_1) și o stare 2 (T_2, V_2) rezultă $\Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln\frac{V_2}{V_1}$ (1).

a) În cazul transformării izocore, $V_1 = V_2$ și $\Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} = 21{,}6$ kJ/K.

b) În cazul transformării izobare, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$ și (1) devine $\Delta S = \nu(C_V + R)\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1} = 30{,}24$ kJ/K.

2.110. a) În transformarea izobară, $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$ și expresia (1) din problema 2.109 devine $\Delta S = \nu C_p \ln\frac{V_2}{V_1} = 3{,}195$ J/K.

b) În transformarea izotermă, $T_1 = T_2$ și din relația (1) a problemei 2.109 rezultă că $\Delta S = \nu R \ln\frac{V_2}{V_1} = 0{,}91$ J/K.

2.111. a) $\Delta S = C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\frac{V_2}{V_1}$ (vezi relația (1) din problema 2.109), unde $C_V = \frac{R}{\gamma - 1}$ și $\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(n-1)}$. Deci, $\Delta S = \frac{R}{\gamma - 1}\ln\frac{T_2}{T_1} + R\ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{1/(n-1)} = \frac{R(n-\gamma)}{(\gamma-1)(n-1)}\ln\frac{T_2}{T_1} = 4781$ J/K.

b) $L = \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{n - 1} = \frac{R(T_1 - T_2)}{n - 1} = -415{,}5$ kJ.

2.112. a) Din $Q = \nu C_p (T_2 - T_1)$ rezultă $C_p = \frac{Q}{\nu(T_2 - T_1)}$, iar $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_p}{C_p - R} = \frac{Q}{Q - \nu R(T_2 - T_1)} = 1{,}67$.

b) $\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \nu(C_p - R)(T_2 - T_1) = Q - \nu R(T_2 - T_1) = 718$ kJ.

c) $L = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = 481{,}98$ kJ.

d) $\Delta S = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q}{T_2 - T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} = 3{,}77$ kJ/K.

2.113. a) Variația energiei interne, $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1) = \nu C_V\left(\frac{p_2V_2}{\nu R} - \frac{p_1V_1}{\nu R}\right) = \frac{C_V}{R}p_1V_1\left(\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = -62{,}50\cdot 10^3$ J.

b) Variația entropiei gazului este (vezi formula (1) din problema 2.109):

$$\Delta S = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R\ln\frac{V_2}{V_1} = \nu C_V\left(\ln\frac{p_2}{p_1} + \ln\frac{V_2}{V_1}\right) + R\ln\frac{V_2}{V_1} =$$

$$= \nu\left(C_V\ln\frac{p_2}{p_1} + C_p\ln\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{1}{2}\nu R\left(5\ln\frac{p_2}{p_1} + 7\ln\frac{V_2}{V_1}\right) = 239 \text{ J/K}.$$

2.114. a) Variația entropiei va fi egală cu suma variațiilor entropiei celor două gaze. Procesul este izoterm și volumul final al ambelor gaze este $V_1 + V_2$. Deci, conform relației (1) din problema 2.109,

$$\Delta S = \nu_1 R\ln\frac{V_2+V_1}{V_1} + \nu_2\ln\frac{V_2+V_1}{V_2} = 6{,}3 \text{ mJ/K}.$$

b) Variația energiei interne este dată de diferența dintre energia internă a amestecului și energiile interne inițiale ale celor două gaze. Gazele fiind considerate ideale, C_V este același. Temperatura rămînînd constantă:

$$\Delta U = U - (U_1 + U_2) = (\nu_1+\nu_2)C_VT - (\nu_1C_VT + \nu_2C_VT) = 0.$$

2.115. a) În figura 2.115 R sînt reprezentate transformările în coordonate $p-V$.

b) Din ecuația transformării adiabatice 1—2, $p_1^{1-\gamma}T_1^{\gamma} = p_2^{1-\gamma}T_2^{\gamma}$ rezultă că $T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 264$ K.

c) $Q_{ced} = Q_{23} = \frac{m}{\mu}RT_2\ln\frac{p_2}{p_1} = -1{,}765$ kJ.

d) $\Delta U = \Delta U_{12} = \nu C_V(T_2 - T_1) = -1{,}62$ kJ.

e) $L = Q - \Delta U = -0{,}145$ kJ.

f) $\Delta S = \Delta S_{23} = \nu R\ln\frac{p_2}{p_1} = -6{,}685$ J/K.

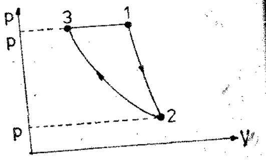

Fig. 2.115. R.

2.116. a) Reprezentările transformărilor sînt date în figurile 2.116 a, b R.

b) $Q_{abs} = \nu C_p(T_1 - T_2) = \frac{7}{2}R\left(T_1 - \frac{T_1}{2}\right) = 4{,}36$ MJ.

c) $L = p_2(V_3 - V_2) = \nu R(T_1 - T_2) = \frac{\nu}{2}RT_1 = 1{,}25$ MJ.

d) $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1) + \nu C_V(T_1 - T_2) = 0.$

e) $\Delta S = \nu C_V\ln\frac{T_2}{T_1} + \nu C_p\ln\frac{T_1}{T_2} = \nu R\ln\frac{T_1}{T_2} = 5{,}7$ kJ/K.

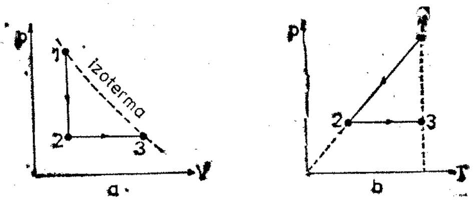

Fig. 2.116.a.b. R.

2.117. a) $Q = \nu C_V(T_2 - T_1) = \frac{5p_1V}{2T_1}(T_1 - T_2) = 5{,}49$ J.

b) $\Delta U = \nu C_V(T_2 - T_1) = -Q = -5{,}49$ J.

c) $\Delta S = \nu C_V\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{5p_1V}{2T_1}\ln\frac{T_2}{T_1} = -19{,}5$ mJ/K.

2.118. Folosind expresia (1) din problema 2.109 pentru variația entropiei, $\Delta S = \nu C_V\ln\frac{T_2}{T_1} + \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$, pe drumul 1—2, $\Delta S_{1-2} = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$ (deoarece $T_2 = T_1$), iar pe drumul 1—3—2, $\Delta S_{1-3-2} = \Delta S_{1-3} + \Delta S_{3-2} = \nu C_V\ln\frac{T_3}{T_1} + \nu R\ln\frac{V_2}{V_1} + \nu C_V\ln\frac{T_1}{T_3}$ (deoarece $V_2 = V_3$) adică $\Delta S_{1-3-2} = \nu R\ln\frac{V_2}{V_1}$, deoarece $\ln\frac{T_3}{T_1} = -\ln\frac{T_1}{T_3}$.

Rezultă că $\Delta S_{1-2} = \Delta S_{1-3-2}$, care este o consecință a proprietății entropiei de a fi o mărime de stare.

2.119. $\Delta S = \frac{Q}{T}$, unde Q este căldura primită de aer de la pendul prin frecare, iar T este temperatura aerului. Cînd oscilațiile pendulului s-au stins întreaga sa energie potențială s-a transformat în căldură prin frecare, deci $Q = mgl(1 - \cos\theta)$ și $\Delta S = \frac{mgl(1-\cos\theta)}{T}$.

2.120. a) $Q = \nu C_p(T_2 - T_1)$, unde $T_1 = \frac{pV_1}{R}$ și $T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1}$, iar $C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$. Deci, $Q = \frac{\gamma}{\gamma-1}pV_1\left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right) = 4{,}8$ kJ.

b) $\Delta S = \nu C_p\ln\frac{T_2}{T_1} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}\ln\frac{V_2}{V_1}$ și $\frac{\Delta S}{\nu} = \frac{R}{\gamma-1}\ln\frac{V_2}{V_1} = 36{,}517$ kJ/K.

2.121. a) În coordonate $p - V$ ciclul este reprezentat în figura 1 R. În starea 1, $p_1V_1 = \nu RT_1$, de unde $T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R} = 300$ K.

ransformarea $1-2$: $\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}$, de unde $= T_1\frac{p_2}{p_1} = 360$ K. Pentru calcularea lui scriem expresia randamentului : $1 - \frac{T_1}{T_3}\Big) = \frac{P_u}{D_m q}$, unde $D_m = \frac{m}{t}$ este debitul ic de cărbune. Deci, $T_3 = 600$ K. Din ația transformării $3-4$: $\frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_4}$ rezultă $T_4 = T_3\frac{p_1}{p_2} = 500$ K.

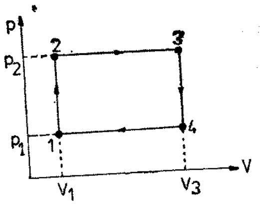

Fig. 2.121. R.

b) $\Delta U_{\text{ciclu}} = 0$, energia internă fiind o mărime de stare.

c) $L_{23} = p_2(V_3 - V_1)$, unde $V_3 = \frac{\nu RT_3}{p_2}$. Deci, $L_{23} = \nu RT_3 - p_2V_1 = 3988{,}8$ J.

d) $\Delta S_{\text{ciclu}} = 0$, entropia fiind o mărime de stare.

2.122. a) $\Delta S_{\text{apă}} = mc\int_{T_1}^{T_0}\frac{dT}{T} = mc\ln\frac{T_0}{T_1} = 778{,}7$ J/K și $\Delta S_{\text{rezervor}} = \frac{Q}{T_0} = \frac{mc(T_1 - T_0)}{T_0}$, deoarece temperatura T_0 a rezervorului rămîne nstantă, iar Q este căldura cedată apei. Deci, $\Delta S_{\text{rezervor}} = -710$ J/K. Atunci, $\Delta S_{\text{sistem}} = 68{,}7$ J/K.

b) Analog, $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 50{,}4$ J/K.

c) Se observă că utilizarea a două surse micșorează variația ıtropiei. Rezultă că dacă numărul de surse de căldură tinde la innit, $\Delta S \mapsto 0$.

2.123. a) Procesul nu ar fi ireversibil dacă s-ar putea transfera nergia de la baia rece din nou piesei metalice fierbinți fără intervenie din afară. Acest lucru este evidențiat și de faptul că variația entroiei este pozitivă, după cum se va vedea la punctul b).

b) $\Delta S_{\text{piesă}} = \int_{T_1}^{T_f}\frac{C_1 dT}{T} = C_1\ln\frac{T_f}{T_1}$ și $\Delta S_{\text{baie}} = \int_{T_2}^{T_f}\frac{C_2 dT}{T} = C_2\ln\frac{T_f}{T_2}$, ınde T_f rezultă din ecuația calorimetrică : $C_1(T_1 - T_f) = C_2(T_f - T_2)$, ıdică $T_f = \frac{C_1T_1 + C_2T_2}{C_1 + C_2} = 307$ K. Atunci, $\Delta S_{\text{piesă}} = -230{,}85$ J/K

și $\Delta S_{\text{baie}} = 390$ J/K. Pentru întregul sistem, $\Delta S = \Delta S_{\text{piesă}} + \Delta S_{\text{baie}} = 159{,}35$ J/K.

2.3. Teoria cinetico-moleculară

2.124. Ecuația de stare pentru amestecul de gaze se scrie : $pV = (N_{He} + N_{Ar})kT$, unde N_{He} este numărul de atomi de heliu iar N_{Ar} este numărul de atomi de argon. Introducînd concentrațiile $n_{He} = \frac{N_{He}}{V}$ și $n_{Ar} = \frac{N_{Ar}}{V}$, ecuația de stare se scrie, $p = (n_{He} + n_{Ar})kT$ (1). Densitatea amestecului este dată de :

$$\rho = \frac{m_{\text{amestec}}}{V} = \frac{N_{He}m_{He} + N_{Ar}m_{Ar}}{V} = n_{He}m_{He} + n_{Ar}m_{Ar} \quad (2).$$

Din (1) și (2) $n_{He} = \frac{pm_{Ar} - \rho kT}{kT(m_{Ar} - m_{He})} = 6\cdot 10^{25}\ \text{m}^{-3}$.

2.125. Din expresia densității $\rho = \frac{p\mu}{RT} = \frac{pm_0}{kT}$ și ecuația termică de stare $p_0 = n_0kT_0$ rezultă $m_0 = \frac{\rho p_0 T}{pn_0T_0} = 3{,}33\cdot 10^{-27}$ kg. Gazul este hidrogenul.

2.126. Din ecuația de stare $pV = \frac{N}{N_A}RT$ rezultă că $N = \frac{pN_AV}{RT} = 3\cdot 10^4\ \text{m}^{-3}$.

2.127. a) $m_{O_2} = \frac{p_{O_2}V\mu_{O_2}}{RT} = 6{,}4$ g;

b) $p_{\text{total}} = p_{O_2} + p_{N_2} = p_{O_2} + \frac{\nu_{N_2}RT}{V} = 174650\ \text{N/m}^2$;

c) $\sqrt{\overline{v^2_{O_2}}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_{O_2}}} = 483$ m/s; și $\sqrt{\overline{v^2_{N_2}}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu_{N_2}}} = 517$ m/s.

2.128. a) Din ecuația de stare, $p = nkT = 1{,}33\cdot 10^3\ \text{N/m}^2$.

b) $v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kN_AT}{\mu}} = 497{,}5$ m/s.

2.129. Numărul mediu de ciocniri pe secundă $\bar{z}$ ale moleculelor oxigen se găsește din relația $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\lambda_2}$, unde $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ și $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \frac{p_1}{p_2}$. Astfel:

$$\bar{z} = \frac{p_2}{p_1 \bar{\lambda}_1}\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} = 4,5 \cdot 10^7\ \mathrm{s}^{-1}.$$

2.130. Pentru ca moleculele să nu se ciocnească una de alta ebuie ca lungimea medie a drumului liber să fie mai mică decît iametrul vasului, adică:

$$D \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}\, n_0 \pi d^2}, \quad \text{deci} \quad n_0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 D} = 1,7 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}.$$

2.131. Din expresia energiei cinetice medii de translație a unei olecule, $U = \frac{3}{2}kT$, rezultă $T = \frac{2U}{3k} = 7730$ K.

2.132. Energia internă este egală cu $U = \frac{m}{\mu}\frac{i}{2}RT$, unde $= 5$ este numărul gradelor de libertate ale moleculelor biatomice, rei grade de libertate pentru mișcarea de translație și două pentru mișcarea de rotație. Deci, $U = 3,7 \cdot 10^3$ J, $U_{\text{trans}} = 2,2 \cdot 10^3$ J și $U_{\text{rot}} = 1,5 \cdot 10^3$ J, deci $\frac{U_{\text{trans}}}{U} = 0,6$ și $\frac{U_{\text{rot}}}{U} = 0,4$.

2.133. $p = \frac{\rho RT}{\mu}$, din ecuația de stare, iar $T = \frac{\mu v_t^2}{3R}$, deci $p = \frac{1}{3}\rho v_t^2 = 5 \cdot 10^3\mathrm{N/m^2}$.

2.134. Din ecuația de stare, $p = \frac{NkT}{V}$ (1) unde N este numărul total de molecule din volumul V. Aceste N molecule formează un strat monomolecular de suprafață $4\pi r^2$. Deci: $N = \frac{4\pi r^2}{s}$ (2). Volumul sferei fiind, $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ (3) și înlocuind (2) și (3) în (1)

$$p = \frac{3kT}{sr} = 2,3\ \mathrm{N/m^2}.$$

2.135. a) Din formula fundamentală a teoriei cinetico-moleculare înainte de încălzire, $p_1 = \frac{1}{3}nmv_{t_1}^2$, iar după încălzire, $p_2 = \frac{1}{3}nmv_{t_2}^2$, de unde, $\frac{v_{t_1}}{v_{t_2}} = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2}$.

b) $v_{t_2} = 2v_{t_1} = 2\sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}} = 968,8$ m/s.

2.136. a) Din ecuația de stare, $n = \frac{p}{kT}$ și din $v_t = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$, rezultă $n = \frac{3pN_A}{\mu v_t^2} = 10^{25}\ \mathrm{m}^{-3}$.

b) Densitatea, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} = \frac{3p}{v_t^2} = 0,467\ \mathrm{kg/m^3}$.

2.137. Din $v_{t_1} = \sqrt{\frac{3RT_1}{\mu}}$ și $v_{t_2} = \sqrt{\frac{3RT_2}{\mu}}$ rezultă: $\mu = \frac{3R\Delta T}{v_{t_2}^2 - v_{t_1}^2} = 29$ kg/kmol. Gazul este aerul.

2.138. a) Din ecuația adiabatei în reprezentarea $p - V : pV^\gamma =$ const. și ecuația de stare a gazelor $pV = \nu RT$, eliminînd volumul, se obține ecuația adiabatei în reprezentarea $p - T$, $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} =$ const. sau $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (1) unde $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{i+2}{i}$ (2). Heliul (gaz monoatomic) are $i = 3$, încît $\gamma = \frac{5}{3}$ și $T_2 = T_1\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 90,5$ K. Deci, prin destinderea adiabatică se obține răcirea gazelor.

b) $\Delta v = \sqrt{\overline{v_1^2}} - \sqrt{\overline{v_2^2}} = \sqrt{\frac{3R}{\mu}}(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}) = 616,6$ m/s.

$$\Delta E = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}(T_1 - T_2) = 4,3 \cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}.$$

c) Din ecuația generală de stare $pV = \nu RT = \frac{N}{N_A}RT$ se obține $n = \frac{N}{V} = \frac{pN_A}{RT}$ și $\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{N_A}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) = 12,27 \cdot 10^{26}$ molecule/m³.

2.139. a) În starea inițială, $pV = \frac{m_1}{\mu} RT_1$, iar în starea finală, $pV = \frac{m_2}{\mu} RT_2$, de unde $m = m_1 - m_2 = \frac{pV\mu}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$ și

$$V = \frac{mRT_1T_2}{p\mu(T_2 - T_1)} = 351 \cdot 10^{-5}\ \text{m}^3.$$

b) Încălzirea fiind izobară,

$$Q = \nu_1 C_p(T_2 - T_1) = \nu_1 \frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1), \quad \text{unde} \quad \nu_1 = \frac{m_1}{\mu} = \frac{pV}{RT_1} = \frac{mT_2}{\mu(T_2 - T_1)}.$$ Atunci, $\gamma = \frac{\mu Q}{\mu Q - mRT_2} = 1,4$.

c) $N_2 = \nu_2 N_A = \frac{pV}{RT_2} N_A = \frac{mT_1N_A}{\mu(T_2 - T_1)} = 6,42 \cdot 10^{22}$ molecule.

2.140. a) Considerăm argonul gaz ideal (monoatomic) și ciocnirile atomilor cu pistonul perfect elastice. În figura 2.140 R este prezentată interacțiunea dintre o moleculă și un perete fix. În urma ciocnirii cu peretele componenta normală a vitezei își conservă valoarea, dar își schimbă sensul cu π, în timp ce componenta tangențială rămîne neschimbată ca valoare și sens. În cazul problemei noastre moleculele se lovesc de pistonul mobil. Considerăm că pistonul mobil se deplasează cu viteza u. Viteza relativă a particulei față de perete este $v - u$.

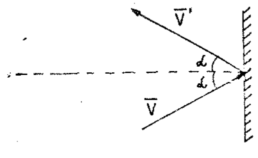

Fig. 2.140. R.

Dacă se alege axa Oz în sensul lui u, creșterea energiei cinetice a particulei (de masă m_0) în urma ciocnirii peretelui mobil este dată de:

$$\frac{1}{2}m_0v'^2 - \frac{1}{2}m_0v^2 = \frac{1}{2}m_0v_z'^2 - \frac{1}{2}m_0v_z^2 = 2m_0\,u(u_0 - v_z) = -2m_0uv_z$$

unde s-a ținut seamă că $v \ll v_z$. Dacă se notează cu n_i concentrația moleculelor care au componenta v_{zi} a vitezei, atunci numărul moleculelor cu această componentă a vitezei ce lovesc într-un timp dt un element de arie dS al pistonului va fi: $dN = \frac{1}{2} n_iv_{zi}\,dt\,dS$

unde $\frac{1}{2}$ apare din cauză că doar jumătate din numărul de molecule se mișcă spre perete și cealaltă jumătate în sens opus. Întrucît în urma ciocnirii perfect elastice starea internă a moleculei nu se schimbă, rezultă că dN molecule vor suferi o variație a energiei cinetice $\frac{1}{2} n_iv_{zi}\,dt\,dS(-2m_0uv_{zi}) = -m_0\,n_iv_{zi}^2\,dV$ unde $dV = u\,dt\,dS$ este

variația volumului gazului. Însumînd contribuțiile tuturor moleculelor (de diferite viteze) care vin spre perete, obținem variația energiei cinetice a gazului la o variație dV a volumului: $dE_c = -m_0 dV \sum_i n_iv_{zi}^2$.

Valoarea medie a componentei vitezei v_z este $v_z = \frac{1}{n}\sum v_{zi}^2$ unde $n = \frac{N}{V}$ este concentrația de molecule. Datorită izotropiei mișcărilor moleculare avem: $v_x^2 = v_y^2 = v_z^2 = \frac{1}{3}v^2$ unde v^2 este viteza pătratică medie. Deci $dE_c = -\frac{1}{3}nm_0v^2\,dV$. Se știe că energia internă a gazului ideal monoatomic este formată numai din energia internă de translație a moleculelor, încît

$$dU = -\frac{2}{3}N\frac{m_0v^2}{2}\frac{dV}{V} = -\frac{2}{3}U\frac{dV}{V} \quad \text{sau} \quad \frac{dU}{U} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V}.$$

Prin integrare se obține: $UV^{2/3} = \text{const}$. Dar energia internă a gazului ideal (monoatomic) fiind proporțională cu temperatura absolută, rezultă ecuația transformării adiabatice a unui gaz monoatomic: $TV^{2/3} = \text{const}$.

b) Oxigenul suferă o transformare izotermă. Energia sa internă rămîne deci neschimbată. Energia internă a sistemului argon+oxigen se schimbă numai prin transformarea adiabatică a argonului. Sistemul schimbă cu mediul exterior numai căldură prin termostat. Deoarece lucrul mecanic efectuat de sistem asupra mediului este zero atunci: $\Delta U = Q$. Punînd indicele 1 mărimilor care se referă la argon și 2 mărimilor ce se referă la oxigen avem: $\Delta U = \frac{m_1}{\mu_1}\frac{3}{2}R(T_1' - T_1) = Q$ unde T_1' este temperatura finală a argonului se obține $\frac{m_1}{\mu_1}\frac{3}{2}RT_1\left[\left(\frac{V_1}{V_1'}\right)^{2/3} - 1\right] = Q$ de unde $T_1 = \frac{2}{3}\frac{m_1}{\mu_1}\frac{Q}{R}\cdot\frac{1}{(V_1/V_1')^{2/3} - 1} = 1000$ K. Din relația $\frac{T_1'}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_1'}\right)^{2/3} = \frac{1}{4}$ deci $T_1' = 250$ K. Din transformarea izotermă a oxigenului rezultă $p_2' = p_2\frac{\rho_2'}{\rho_1} = 2,026 \cdot 10^5\ \text{N/m}^{-2}$. S-a notat cu p_2' presiunea finală a oxigenului. Din condiția de echilibru a presiunilor, presiunea p_2' a argonului va fi

$= p'_1 = 2{,}026\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$. Din ecuația de stare, scrisă pentru argon, avem:

$$p_1 = p'_1 \frac{V'_1}{V_1}\frac{T_1}{T'_1} = 64{,}9 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^{-2}} \text{ și } V_1 = \frac{m_1}{\mu_1}\frac{RT_1}{p_1} = 1{,}02\ \mathrm{m^3}$$

$$V'_1 = 8V_1 = 8{,}16\ \mathrm{m^3}.$$

c) După deschiderea robinetului gazele se amestecă și presiunea va avea valoarea p', iar temperatura va fi cea a termostatului. Numărul total de moli se conservă astfel încît $\nu = \nu_1 + \nu_2$ sau

$$\frac{p'(V'_1 + V'_2)}{RT} = \frac{p'_1 V'_1}{RT'} + \frac{p'_2 V'_2}{RT}.$$

Determinăm V'_2 din constanța volumului total: $V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2$ și $\frac{V'_2}{V_2} = \frac{\rho_2}{\rho'_2}$, adică $V'_2 = \frac{V_2}{2}$. Dar $V_2 - V'_2 = V'_1 - V_1$, deci

$$V_2 = 2(V'_1 - V_1) = 14{,}28\ \mathrm{m^3} \text{ și } V'_2 = 7{,}14\ \mathrm{m^3}.$$

Rezultă $p' = p'_1 \frac{V'_1}{V_1 + V_2} \cdot \frac{T}{T_1} = 2{,}23 \cdot 10^5\ \mathrm{N \cdot m^{-2}}$.

2.4. Dilatarea termică

2.141. $l_0 = 2\pi r_0$; $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$;

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2);\quad N_1 = \frac{L}{l_1};\quad N_2 = \frac{L}{l_2},$$

$$N = N_2 - N_1 = \frac{L}{l_0}\left(\frac{1}{1 + \alpha t_2} - \frac{1}{1 + \alpha t_1}\right) = \frac{L}{2\pi r_0}\cdot$$

$$\cdot \frac{(t_1 - t_2)}{(1 + \alpha t_1)(1 + \alpha t_2)} \approx 9{,}5 \text{ rotații.}$$

2.142. $l = l_0(1 + \alpha t)$; $l_0 = \frac{l}{1 + \alpha t}$;

$$l_1 = l_0(1 + \alpha t_1) = \frac{l}{1 + \alpha t}(1 + \alpha t_1);$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha t_2) = \frac{l}{1 + \alpha t}(1 + \alpha t_2);$$

$$\Delta l = AB = l_1 - l_2 = \frac{l\alpha(t_1 - t_2)}{(1 + \alpha t)}.$$

Unghiul β la centrul rolei, ce subîntinde arcul $AB = \Delta l$, este

$$\beta = \frac{\Delta l \cdot 360}{\pi d} = \frac{l\alpha(t_1 - t_2)}{\pi d(1 + \alpha t)} \cdot 360° = 0°22'45''.$$

2.143. Notînd cu l_{01} lungimea riglei de fier și cu l_{02} lungimea celei din cupru la 0°C, iar cu l diferența dintre ele la t_1, se poate scrie: $l_{01}(1 + \alpha_{Fe} t_1) - l_{02}(1 + \alpha_{Cu} t_1) = l$. Rezolvînd sistemul pentru cele două cazuri ($+l$ și $-l$) se obține:

a) $$l_{01} = \frac{\alpha_{Cu}\, l}{\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe}} = 6{,}8\ \mathrm{cm},$$

$$l_{02} = \frac{\alpha_{Fe}\, l}{\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe}} = 4{,}8\ \mathrm{cm}.$$

b) $$l_{01} = \frac{2 + \alpha_{Cu}(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe})}\, l = 208{,}5\ \mathrm{cm}.$$

$$l_{02} = \frac{2 + \alpha_{Fe}(t_1 + t_2)}{(t_2 - t_1)(\alpha_{Cu} - \alpha_{Fe})}\, l = 206\ \mathrm{cm}.$$

2.144. Forțele de întindere din fire, satisfac relația: $F_1 + F_2 + F_3 = mg$ (1). La echilibru, momentul forțelor active este egal cu momentul forțelor reactive. Față de capătul din stînga, avem: $G\frac{d}{2} = F_2 d + F_3 2d$ (2). Deoarece $\Delta l_1 = \frac{F_1}{E_1}\cdot\frac{l}{S}$; $\Delta l_2 = \frac{F_2}{E_2}\cdot\frac{l}{S}$;

$\Delta l_3 = \frac{F_3}{E_3}\cdot\frac{l}{S}$ între alungiri există relația $$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_1}{\Delta l_3 - \Delta l_1} = \frac{\frac{F_2}{E_2} - \frac{F_1}{E_1}}{\frac{F_3}{E_3} - \frac{F_1}{E_1}}\ (3).$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații (1), (2), (3) avem: $F_1 = \frac{13}{22}G$; $F_2 = \frac{7}{22}G$; $F_3 = \frac{2G}{22}$. Deoarece alungirea prin dilatare trebuie să fie egală cu cea dată de legea Hooke avem: $\Delta l = \frac{1}{E}\frac{F}{S}l = \alpha l \Delta\theta$, sau $\Delta\theta = \frac{F}{ES\alpha}$. Deci $\Delta\theta = \frac{F_1}{E_1 S\alpha_1} = \frac{F_2}{E_2 S\alpha_2} = \frac{F_3}{E_3 S\alpha_3}$ rezultînd $\frac{\alpha_1}{13} = \frac{\alpha_2}{7} = \alpha_3$.

2.145. Dacă ar fi fost libere, barele s-ar fi dilatat cu $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = (\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2)\Delta\theta$. Pentru comprimarea lor cu aceeași can-

:itate $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{F}{S}\left(\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}\right)$ este necesară o forță

$$F = \frac{\Delta l S}{\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}} = \frac{(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2) S \Delta\theta}{\frac{l_1}{E_1} + \frac{l_2}{E_2}}.$$

2.146. a) Deplasarea corpului se produce cînd tensiunea F din bară depășește forța de frecare $F = \mu mg$ adică bara este comprimată cu

$$\Delta l = \frac{\mu mg l}{ES} = \alpha l \Delta\theta'; \quad \Delta\theta' = \frac{\mu mg}{\alpha ES} \approx 167° \text{ C}.$$

b) $\Delta l = \Delta l' - \Delta l'' = \alpha l \Delta\theta'' - \frac{\mu mg}{ES}$,

$$\Delta\theta'' = \frac{\mu mg}{\alpha ES} + \frac{\Delta l}{\alpha l} = \Delta\theta' + \frac{\Delta l}{\alpha l} \approx 239° \text{ C}$$

Energia consumată este

$$W = MC\,\Delta\theta + \mu mg\,\Delta l + k\frac{(\Delta l')^2}{2} \quad \text{unde} \quad k = \frac{ES}{l}.$$

Se obține $W \approx 14{,}4$ kJ.

2.147. a) $m = \rho_1 V_1 = \frac{\rho_0}{1 + 3\alpha t_1} S l_1 = 3{,}9$ kg.

b) $\Delta t = \frac{Q}{mc} = \frac{Q(1 + 3\alpha t_1)}{\rho_0 S l_1 c} = 4{,}27$°C.

$t = t_1 + \Delta t = -15{,}73$°C.

c) $l = l_0(1 + \alpha t)$; $l_1 = l_0(1 + \alpha t_1)$; $\Delta l = l - l_1 = l_0 \alpha (t - t_1) \Rightarrow$

$$= \frac{l_1 \alpha (t - t_1)}{1 + \alpha t_1} \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

d) $F = ES\frac{\Delta l}{l_1} = \frac{ES\alpha(t - t_1)}{1 + \alpha t_1} = 973$ N.

e) $L = F_m \Delta l = \frac{1}{2} F \Delta l = 1{,}92 \cdot 10^{-3}$ J.

2.148. a) $\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$ unde $\Delta t = \frac{Q}{mc}$ deci $\Delta l = l_0 \alpha \frac{Q}{mc}$, unde

$l_0 = \frac{m}{S\rho}$ și $\Delta l = \frac{\alpha Q}{S\rho c} = 3 \cdot 10^{-2}$ m.

b) $\Delta l = l_0 \alpha \Delta t = \frac{l_0 F}{ES}$ deci $F = \alpha \Delta t ES = 7 \cdot 10^5$N.

c) $Q = m_1 c \Delta t + m_1 \lambda_v$, de unde $m_1 = 9$ kg.

d) $Q = \eta m q$, $m = 230$ kg.

2.149. Dacă se notează cu N numărul oscilațiilor efectuate de un pendul precis, atunci perioadele oscilațiilor la temperaturile t_1 și t_2 vor fi : $T_1 = \frac{n - 5}{N}$ și $T_2 = \frac{n + 10}{N}$ unde n reprezintă numărul de secunde dintr-o zi : $n = 24.3600 = 86\,400$ s. Raportul celor două perioade se scrie

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = \sqrt{\frac{1 + \alpha t_1}{1 + \alpha t_2}} = \frac{n - 5}{n + 10}.$$

Se obține $\alpha \simeq 2{,}4\ 10^{-5}$ grad^{-1}.

2.150. Pentru temperaturile t, t_1 și t_2 avem succesiv $V = V_0(1 + 3\alpha t)$, $V_1 = V_0(1 + 3\alpha t_1)$, $V_2 = V_0(1 + 3\alpha t_2)$ sau $\frac{V_1}{V} = \frac{1 + 3\alpha t_1}{1 + 3\alpha t}$; $\frac{V_2}{V} = \frac{1 + 3\alpha t_2}{1 + 3\alpha t}$ încît $V_1 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1 + 3\alpha t_1}{1 + 3\alpha t}$; $V_2 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 \frac{1 + 3\alpha t_2}{1 + 3\alpha t}$.

Deci, $V = V_1 - V_2 = \frac{\pi d^3}{6} \frac{3\alpha(t_1 - t_2)}{1 + 3\alpha t} = 0{,}18 \cdot 10^{-7}$ m^3.

2.151. a) Masa sferei va fi : $m_1 = \rho_{01} V_{01}$ unde $V_1 = V_{01}(1 + 3\alpha_1 t_1)$ încît $m_1 = \frac{\rho_{01} V_1}{1 + 3\alpha_1 t_1} = 4{,}024$ kg. Analog, masa barei va fi

$$m_2 = \frac{\rho_{02} V_2}{1 + 3\alpha_2 t_2} = \frac{\rho_{02} S_2 l_2}{1 + 3\alpha_2 t_2} = 2{,}668 \text{ kg}.$$

Din ecuația calorimetrică $m_1 c_1 (t_1 - t) = (m_2 c_2 + m_a c_3)(t - t_2)$ rezultă :

$$t = \frac{m_1 c_1 t_1 + (m_2 c_2 + m_a c_3) t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + m_a c_3} = 85°\text{C}.$$

b) Volumul sferei la temperatura t este : $V_t = V_1[1 + 3\alpha_1(t - t_1)] = V_1[1 - 3\alpha_1(t_1 - t)] = 517$ cm^3. Volumul apei la 0°C este $V_0 = 2000$ cm^3, iar la temperatura de echilibru $V_a = V_0(1 + \alpha t) = 2030{,}6$ cm^3. Lungimea barei la temperatura de echilibru este $l_t = l_2[1 + \alpha_2(t - t_2)] = 15{,}018$ cm.

2.152. a) Din legea gazelor perfecte, rezultă :

$$m_1 = \frac{p_1 V_1 \mu}{R T_1} = 0{,}064 \text{ kg}.$$

b) $\frac{\Delta V}{V_0} = 3\alpha \Delta t$; $\Delta t = \frac{1}{3\alpha}\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)$.

$$\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{M_b c \Delta t}{q \Delta m} = \frac{M_b c\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)}{3\alpha q \Delta m} \text{ de unde rezultă } \Delta m = \frac{M_b c\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)}{3\alpha \eta q} =$$

$= 17 \cdot 10^{-3}$ kg.

c) $m_2 = m_1 - \Delta m = 43\cdot10^{-3}$ kg (masa gazului rămas)

$$p_1V = \frac{m_1}{\mu}RT;\quad p_2V = \frac{m_2}{\mu}RT \text{ sau } \frac{p_1}{p_2} = \frac{m_1}{m_2};$$

$$p_2 = p_1\frac{m_2}{m_1} = 1{,}48\cdot10^6\,\mathrm{N/m^2}.$$

2.153. a) Din legea conservării energiei $\frac{mv_0^2}{2} + mgH = mgh' + Q$ rezultă căldura degajată $Q = \frac{mv_0^2}{2} + mg(H-h')$. Din ecuația calorimetrică $\eta = \frac{Q_u}{Q_c} = \frac{mc\Delta\theta}{\frac{mv_0^2}{2}+mg(H-h')}$ rezultă

$$\Delta\theta = \frac{\eta}{c}\left[\frac{v_0^2}{2}+g(H-h')\right] = 15{,}5°\mathrm{C}.$$

b) Din dilatarea în volum $V = V_0(1+3\alpha\Delta\theta)$ avem

$$\Delta V = V - V_0 = 3\alpha V_0\Delta\theta \text{ sau } \frac{\Delta V}{V_0} = 3\alpha\Delta\theta = 0{,}5\cdot10^{-3}.$$

2.154. a) Ecuația calorimetrică se scrie

$$\frac{V_1\rho_{01}}{1+\gamma_1t_1}c_1(t_1-\theta) = \frac{V_2\rho_{02}}{1+3\alpha_2t_2}c_2(\theta-t_2) \text{ rezultă:}$$

$$\theta = \frac{V_1\rho_{01}c_1t_1(1+3\alpha_2t_2)+V_2\rho_{02}c_2t_2(1+\gamma_1t_1)}{V_1\rho_{01}c_1(1+3\alpha_2t_2)+V_2\rho_{02}c_2(1+\gamma_1t_1)}.$$

b) $$h = \frac{1}{S}(V_{1\theta}+V_{2\theta}-V_{1t_1}) = \frac{1}{S}\left(V_1\frac{1+\gamma_1\theta}{1+\gamma_1t_1} + V_2\frac{1+3\alpha_2\theta}{1+3\alpha_2t_2} - V_1\right).$$

2.155. În figura 2.155.R sînt prezentate cele două sfere înainte și după încălzire. Se vede că în cazul sferei așezate pe o suprafață orizontală centrul de greutate se ridică, deci o parte din căldură este transformată în energie potențială. În cazul sferei suspendate energia obținută în urma coborîrii centrului de greutate este transformată în căldură. Rezultă că sfera suspendată va avea o temperatură mai mare. Fie R_0 raza sferei și α coeficientul de dilatare liniară. Dacă temperatura sferei crește cu Δt, raza sferei va crește cu $\Delta R = R_0\alpha\Delta t$. Lucrul mecanic efectuat pentru creșterea energiei potențiale este: $L = mg\,\Delta R = mgR_0\,\alpha\Delta t$. Variația de temperatură Δt a sferei este $\Delta t = \frac{Q}{mc}$, unde Q este căldura cedată celor două sfere. Deci $L = \frac{g}{c}R_0\alpha Q$. În cazul sferei așezate pe un plan orizontal acest lucru se transformă în energie potențială, iar în cazul sferei suspendate se transformă în căldură suplimentară. În ambele cazuri avem o variație a temperaturii $\Delta t'$, a cărei valoare este: $\Delta t' = \frac{L}{mc} = \frac{g\alpha}{mc^2}R_0Q$. Efectul relativ de răcire sau încălzire a sferelor va fi de ordinul $\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \frac{L}{Q} = \frac{g}{c}R_0\alpha$. Avînd în vedere valoarea foarte scăzută a lui α în cazul metalelor se poate trage concluzia că acest efect este foarte mic.

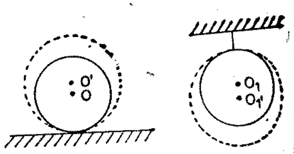

Fig. 2.155.R.

2.156. a) Forța arhimedică este $F_a = \rho_{apă}V_0g = m_1g$.

Deci: $V_0 = \frac{m_1}{\rho_{apă}} = 125\,\mathrm{cm^3}$ și $l_0 = \sqrt[3]{V_0} = 5$ cm.

b) $\rho_{al} = \frac{m_2}{V_0} = 800\,\mathrm{kg/m^{-3}}$. Din $m_3 = V_0\frac{\rho_{al}}{1+\gamma_{al}\cdot t}$ rezultă

$$\gamma_{al} = \frac{1}{t}\left(\frac{V_0\rho_{al}}{m_3}-1\right) = 1{,}1\cdot10^{-3}\,\mathrm{grd^{-1}}.$$

c) Forța arhimedică este $F_{a_1} = V_{Zn}\rho_{al}(t)g = m_4g$, unde $V_{Zn} = l_0^3(1+3\alpha_{Zn}\Delta t)$. Rezultă:

$$\alpha_{Zn} = \frac{1}{3\Delta t}\left[\frac{m_4(1+\gamma_{al}t)}{\rho_{al}\,l_0^3}-1\right] = 2{,}92\cdot10^{-5}\,\mathrm{grad^{-1}}.$$

d) Diferența dintre căldurile primite de cele două cuburi reprezintă diferența dintre energiile lor interne (presupunînd că lucrul efectuat este neglijabil).

$\Delta U = Q_{Zn} - Q_{Si} = m_{Zn}c_{Zn}\,t - m_{Si}c_{Si}t$. Se obține:

$$c_{Si} = \frac{m_{Zn}c_{Zn}t-\Delta U}{m_{Si}t} = 840\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}.$$

2.157. Notînd cu θ temperatura finală a toluenului după amestecarea lichidelor din cele două vase, ecuația calorimetrică se scrie $m_1c\theta = m_2c(t_2-\theta)$ unde m_1 este masa toluenului aflat la 0°C, iar

t_2 masa toluenului aflat la 100°C. Se obține

$$\theta = \frac{m_2 t_2}{m_1 + m_2}, \text{ dar } m_2 = \frac{V_2 \rho_0}{1 + \gamma t_2} \text{ și } m_1 = V_1 \rho_0, \text{ încît}$$

$$\theta = \frac{V_2 t_2}{V_2 + V_1(1 + \gamma t_2)}.$$ Volumul total după amestecare va fi

$$V = (V_1)_\theta + (V_2)_\theta = V_1(1 + \gamma\theta) + V_{20}(1 + \gamma\theta), \text{ unde } V_{20} = \frac{V_2}{1 + \gamma t_2}.$$

Deci

$$V = (1 + \gamma\theta)\left(V_1 + \frac{V_2}{1 + \gamma t_2}\right) =$$

$$= 1 + \frac{\gamma V_2 t_2}{V_2 + V_1(1 + \gamma t_2)} \cdot \left(V_1 + \frac{V_2}{1 + \gamma t_2}\right) = 410 \text{ cm}^3 = V_1 + V_2.$$

2.158. Volumul cilindrului la temperatura t_1 este $V_1 = V_0(1 + 3\alpha_s t_1)$, unde $3\alpha_s$ reprezintă coeficientul de dilatare în volum al sticlei. Cantitățile de mercur ce pot fi conținute de vas la t_0 și t_1 sînt $m_0 = V_0 \rho_0$ și $m_1 = V_1 \rho_1 = V_0(1 + 3\alpha_s t_1) \cdot \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma_1 t_1}$, de unde se obține:

$$\alpha_s = \frac{m_1(1 + \gamma_1 t_1) - m_0}{3 m_0 t_1} \simeq 10^{-5} \text{ grad}^{-1}.$$

2.159. La o temperatură oarecare t volumul vasului va fi: $V_1 = (1 + \gamma_1 t) V_0$, iar pentru amestec: $V_2 = (1 + \gamma_2 t) V_0'$, unde V_0 reprezintă volumul inițial al vasului, iar V_0' este volumul inițial al amestecului. Deoarece $V_1 - V_0 = V_2 - V_0'$ rezultă

$$V_0' = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} V_0 = \frac{3}{8} V_0; \quad \frac{V_0'}{V_0} = \frac{3}{8}.$$

2.160. Notînd cu V_0 volumul unei diviziuni la temperatura $t = 0$°C atunci volumul celor 50 de diviziuni la $t_1 = 10$°C este: $V_1 = 50\, V_0(1 + \gamma_s t_1)$. Acest volum reprezintă în același timp volumul fiecărui lichid la t_1. Dacă se notează cu V_{0Hg} volumul ocupat de mercur la 0°C se poate scrie: $50\, V_0(1 + \gamma_s t_1) = V_{0Hg}(1 + \gamma_{Hg} t_1)$ și în mod similar $50\, V_0(1 + \gamma_s t_1) = V_{0l}(1 + \gamma_l t_1)$, unde V_{0l} reprezintă volumul lichidului la 0°C. Din cele două relații se obțin volumele ocupate de mercur, respectiv lichid la 0°C, cu care se obțin expresiile volumelor ocupate de cele două lichide la t_2. Rezultă:

$$V_{t_2 Hg} = \frac{50 V_0(1 + \gamma_s t_1)}{1 + \gamma_{Hg} t_1}(1 + \gamma_{Hg} t_2)$$

$$V_{t_2 l} = \frac{50 V_0(1 + \gamma_s t_1)}{1 + \gamma_l t_1}(1 + \gamma_l t_2).$$

Deoarece la t_1 între nivelele lichidelor din cele două vase există diferența d, rezultă: $V_{Hg t_2} - V_{l t_2} = d V_0(1 + \gamma_s t_2)$, sau după înlocuire se obține:

$$\frac{1 + \gamma_{Hg} t_2}{1 + \gamma_{Hg} t_1} - \frac{1 + \gamma_l t_2}{1 + \gamma_l t_1} = \frac{d}{50} \cdot \frac{1 + \gamma_s t_2}{1 + \gamma_s t_1}.$$

Rezolvînd se obține: $\gamma_l = 1{,}02 \cdot 10^{-4}$ grad^{-1}.

2.161. Volumul vasului de sticlă și al mercurului la 0°C va fi $V_0 = \dfrac{m_1}{\rho_{Hg}^0}$ (1), unde ρ_{Hg}^0 este densitatea mercurului la 0°C. Volumul mercurului scurs este egal cu diferența dintre variația volumului de mercur și a celui de sticlă, adică $\Delta V_{Hg} - \Delta V_s = \dfrac{m_2}{\rho_{Hg}^t}$, unde $\rho_{Hg}^t = \dfrac{\rho_{Hg}^0}{1 + \gamma_{Hg}\Delta t}$ este densitatea mercurului la temperatura t.

Atunci, $V_0 \gamma_{Hg} \Delta t - V_0 \gamma_s \Delta t = \dfrac{m_2}{\rho_{Hg}^0}(1 + \gamma_{Hg}\Delta t)$ (2). Înlocuind (1) în (2),

$$\Delta t = \frac{m_2}{(m_1 - m_2)\gamma_{Hg} - m_1 \gamma_s} = 96{,}5\text{°C}.$$

2.162. Masa dislocuită de sferă este

$m_p = \rho_p V_p = \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma_p t} V_0(1 + \gamma_s t)$, unde ρ_0 și V_0 sînt densitatea petrolului și volumul sferei la temperatura de 0°C. Avem succesiv,

$$m_1 = \frac{\rho_0}{1 + \gamma_p t_1} V_0(1 + \gamma_s t_1);$$

$m_2 = \dfrac{\rho_0}{1 + \gamma_p t_2} V_0(1 + \gamma_s t_2)$. Făcînd raportul lor rezultă

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1 + \gamma_p t_2}{1 + \gamma_p t_1} \cdot \frac{1 + \gamma_s t_1}{1 + \gamma_s t_2},$$

de unde se obține

$$\gamma_p = \frac{\frac{m_2}{m_1} - \frac{1+\gamma_s t_2}{1+\gamma_s t_1}}{\frac{1+\gamma_s t_2}{1+\gamma_s t_1} t_1 - \frac{m_2}{m_1} t_2} = 0{,}001\ \mathrm{K^{-1}}.$$

2.163. $\rho_0 = \frac{m_0}{V}$; $\rho_1 = \frac{m_1}{V} = \frac{\rho_0}{1+\gamma t_1}$. Deci,

$$\frac{m_1}{V} = \frac{m_0}{V}\frac{1}{1+\gamma t_1}; \quad \gamma = \frac{m_0 - m_1}{m_1 t_1} = 0{,}001\ \mathrm{K^{-1}}.$$

2.164. Notînd cu ρ_0 și V_0 densitatea și volumul mercurului dislocuit la 0°C, iar cu γ coeficientul de dilatare al mercurului avem succesiv : $F = \rho_0 V_0 g$, $F' = \rho V g = \frac{\rho_0}{1+\gamma t} V_0(1+3\alpha t)\,g$. Prin împărțirea celor două relații rezultă $\frac{F}{F'} = \frac{1+\gamma t}{1+3\alpha t}$, sau

$$\gamma = \frac{F-F'}{F't} + 3\alpha\frac{F}{F'} = 1{,}8\cdot 10^{-4}\ \mathrm{K^{-1}}.$$

2.5. Tensiunea superficială

2.165. a) Lichidul urcă în tub pînă cînd greutatea coloanei de apă echilibrează forțele de tensiune superficială : $2\pi\frac{d}{2}\sigma = \pi\frac{d^2}{4} l\rho g$, deci $l = \frac{4\sigma}{d\rho g}$ (legea lui Jurin) și $l = 4{,}86$ cm.

b) Forțele de tensiune superficială vor echilibra doar componenta greutății paralelă cu tubul : $2\pi\frac{d}{2}\sigma = \pi\frac{d^2}{4} l\rho g \sin\alpha$, de unde rezultă $l = \frac{4\sigma}{d\rho g \sin\alpha} = 21{,}6$ cm.

2.166. a) $2\pi r\sigma = \rho g h \pi r^2$, de unde se obține că $h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$.

b) Lucrul efectuat de tensiunea superficială este $L = Fh = \frac{4\pi\sigma^2}{\rho g}$, iar energia potențială a lichidului din capilar este $E_p = mg\frac{h_0}{2} = \frac{2\pi\sigma^2}{\rho g}$; deci $E_p = \frac{L}{2}$. Jumătate din lucrul efectuat de tensiunea superficială este transformată în energie potențială, cealaltă fiind lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de frecare și se transformă în căldură. Dacă nu există vîscozitate și frecare cu pereții nivelul lichidului va efectua oscilații armonice în capilar, h fiind înălțimea din poziția de echilibru.

2.167. a) $F = 2\sigma l = 4{,}8\cdot 10^3$N ;

b) Lucrul mecanic este $L = Fd = 9{,}6\cdot 10^{-5}$ J. Cînd suprafața peliculei se mărește lucrul efectuat de forța mecanică se transformă în energie potențială a peliculei de apă cu săpun.

2.168. Volumul de lichid scurs este $V = n_a V_a = n_g V_g$, unde $V = n_a\frac{m_a}{\rho_a} = n_g\frac{m_g}{\rho_g}$ cu m_a și m_g masele picăturilor de apă și de glicerină. Deci, $\frac{m_a}{m_g} = \frac{n_g}{n_a}\cdot\frac{\rho_a}{\rho_g}$ (1). Pe de altă parte picătura de apă se formează dacă $m_a g = 2\pi\sigma_a r$, iar picătura de glicerină se formează dacă $m_g g = 2\pi\sigma_g r$, unde r este raza orificiului de scurgere al pipetei. Din cele două relații rezultă $\frac{m_a}{m_g} = \frac{\sigma_a}{\sigma_g}$ (2). Din relațiile (1) și (2) se obține că :

$$\sigma_g = \frac{n_a}{n_g}\frac{\rho_g}{\rho_a}\sigma_a = 64{,}8\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N/m}.$$

2.169. Tensiunea superficială creează în interiorul bulei o presiune dată de relația $\pi r^2 p = 2\pi r\sigma$, deci $p = \frac{2\sigma}{r}$. Presiunea totală la care este supusă bula pe fundul apei este $p = p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r_0}$, iar la suprafața apei $p' = p_0 + \frac{2\sigma}{r}$. Cunoscînd volumele bulei în cele două situații $V = \frac{4\pi}{3} r_0^3$ și $V' = \frac{4\pi}{3} r^3$ se poate scrie legea transformării izoterme :

$$\frac{4\pi}{3} r_0^3\left(p_0 + \rho g h + \frac{2\sigma}{r_0}\right) = \frac{4\pi}{3} r^3\left(p_0 + \frac{2\sigma}{r}\right).$$ Se obține că

$$h = \frac{p_0(r^3 - r_0^3) + 2\sigma(r^2 - r_0^2)}{\rho g r_0^3} = 3{,}3\ \mathrm{m}.$$

2.170. Gazul din interiorul bulei suferă o transformare generală: $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$. Tensiunea superficială creează în interiorul bulei o presiune suplimentară dată de $p = \frac{F}{S} = \frac{2\sigma l}{S} = \frac{8\sigma}{d}$, unde $S = \frac{\pi d^2}{4}$ şi $F = 2\sigma l$, deoarece pelicula are două feţe. Rezultă că presiunile din interiorul bulei sînt: $p_1 = p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}$; $p_2 = p_0 + \frac{8\sigma_2}{d_2}$ deoarece tensiunea superficială depinde de temperatură. Înlocuind volumele, $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{1}{6}\pi d_1^3$ şi $V_2 = \frac{1}{6}\pi d_2^3$ rezultă

$$\left(p_0 + \frac{8\sigma_1}{d_1}\right)\frac{\pi d_1^3}{6T_1} = \left(p_0 + \frac{8\sigma_2}{d_2}\right)\frac{\pi d_2^3}{6T_2},$$ de unde $\sigma_2 = 0,047$ N/m.

2.171. Numărul total al picăturilor este:

$$N = \frac{V}{v} = \frac{\frac{4}{3}R^3}{\frac{4}{3}r^3} = \frac{R^3}{r^3}.$$ Suprafaţa celor N picături mici va fi $S = 4\pi r^2 N$, iar suprafaţa picăturii mari este $S_0 = 4\pi R^2$. Deoarece $S > S_0$, prin contopirea celor N picături se eliberează o energie $E = (S - S_0)\,\sigma_g = 4\pi(Nr^2 - R^2)\,\sigma_g = 204\cdot10^{-3}$ J.

2.172. Energia liberă a unei suprafeţe este proporţională cu aria suprafeţei A : $E = \sigma A$, unde σ este coeficientul de tensiune superficială. O picătură mică are două suprafeţe — exterioară şi interioară — ariile acestora fiind practic egale, astfel încît energia liberă a suprafeţei este $E = 2\sigma A$. Variaţia energiei libere a picăturii în timpul măririi volumului va fi : $E = 2\sigma\Delta A(1)$, unde $\Delta A = 4\pi(r_2^2 - r_1^2)$, unde r_1 şi r_2 sînt razele sferelor de volum V_1 şi V_2. Deci, $r_1 = \left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{1/3}$ şi $r_2 = \left(\frac{3V_2}{4\pi}\right)^{1/3}$. Variaţia ariei suprafeţei va fi :

$$\Delta A = 4\pi\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}(2^{2/3} - 1)$$ şi astfel (1) devine :

$$E = 8\pi\,\sigma\left(\frac{3V_1}{4\pi}\right)^{2/3}(2^{2/3} - 1) = 227\cdot10^{-6}\text{ J.}$$

2.173. a) Din conservarea volumului $2\cdot\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{4\pi}{3}R^3$, deci $R = r\sqrt[3]{2} = 1,26$ mm.

b) Energia care se eliberează în urma unirii picăturilor este $\Delta E = \sigma\Delta A$, unde ΔA este diferenţa ariilor suprafeţelor : $\Delta A = 4\pi(2r^2 - R^2) = 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4})$. Rezultă $\Delta E = 4\pi r^2\sigma(2 - \sqrt[3]{4})$. Energia eliberată este folosită pentru încălzirea picăturii de mercur, deci $\Delta E = \sigma\Delta A = mc\,\Delta t$, sau $\frac{8}{3}c\rho\pi r^3\Delta t = 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4})\sigma$, de unde

$$\Delta t = \frac{3\sigma(2 - \sqrt[3]{4})}{2c\rho r} = 1,6\cdot10^{-3}\text{ K.}$$

2.174. Greutatea picăturii în momentul desprinderii este egală cu tensiunea superficială ce apare pe lungimea gîtului tubului ($l = 2\pi r$). Deci, $G = 2\pi r\sigma$. Numărul de picături de alcool din M grame este $n = \frac{Mg}{2\pi r\sigma} = 780$ picături. Timpul de curgere pentru masa M va fi $t = 780$ s.

2.175. Presupunem că înălţimile nivelului mercurului în cele două ramuri înaintea conectării pompei de vid sînt h_1 şi h_2 (fig. 2.175R). Mercurul din tub va fi în echilibru dacă presiunile produse de coloanele de mercur din cele două ramuri sînt egale în secţiunea transversală AB. Presiunea totală în secţiunea transversală AB este compusă din presiunea coloanei de mercur şi presiunea tensiunii superficiale, dată de $\frac{F}{S} = \frac{2\pi r\sigma}{\pi r^2} = \frac{2\sigma}{r}$. Condiţia de echilibru se scrie $\rho gh_1 + \frac{2\sigma}{r_1} = \rho gh_2 + \frac{2\sigma}{r_2}$, deci $h_1 - h_2 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Diferenţa de presiune a aerului trebuie să compenseze această presiune, adică : $\Delta p = \frac{2\sigma}{\rho g}\cdot\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} = 4716$ N/m². Se observă că pompa trebuie conectată la braţul îngust.

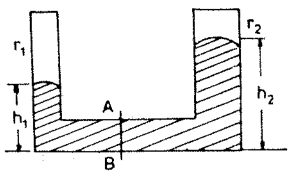

Fig. 2.175.R.

2.176. În momentul cînd capătul tubului atinge suprafaţa lichidului acesta urcă în tub datorită tensiunii superficiale $F = 2\pi r\sigma$ pînă la înălţimea $h = \frac{2\sigma}{\rho gr}$. Dacă asupra suprafeţei lichidului din

ub se acționează cu o presiune $p = p_0 + \Delta p$, unde $p = \frac{2\sigma r}{r^2} = \frac{2\sigma}{r}$ atunci nivelul lichidului va coborî, iar la capătul tubului se va forma o bulă de aer cu raza egală cu cea a tubului. Rezultă $\sigma = \frac{r\Delta p}{2} = 7 \cdot 10^{-2}$ N/m.

2.177. a) Se observă că $\rho g h < \frac{2\sigma}{r}$. Aceasta înseamnă că apa se ridică pînă la vîrful tubului. Meniscul va fi o parte dintr-un cerc (fig. 1.177R).

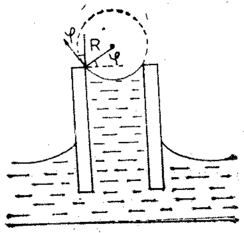

Fig. 2.177.R.

b) $2\pi r\sigma\cos\varphi = \pi r^2\rho g h$, deci $\cos\varphi = \frac{rh\rho g}{2\sigma}$.

Din figura 2.177R se vede că raza de curbură a sferei din care face parte meniscul este

$$R = \frac{r}{\cos\varphi} = \frac{2\sigma}{\rho g h} = 0{,}74 \text{ mm}.$$

2.178. a) Deoarece peretele balonului este dublu rezultă că presiunea p din interiorul balonului de rază R este $p = p_0 + \frac{4\sigma}{R}$, unde p_0 este presiunea atmosferică, iar $\frac{4\sigma}{R}$ este dublul presiunii capilare. Presiunea din interiorul balonului cu raza R împreună cu presiunea secțiunii peliculei dintre baloane trebuie să fie egală cu presiunea din interiorul balonului mic. Deci, $\frac{4\sigma}{R} + \frac{4\sigma}{R_x} = \frac{4\sigma}{r}$, unde R_x este raza de curbură a secțiunii AB.

Rezultă $R_x = \frac{Rr}{R - r}$.

b) În punctul de contact A forțele de tensiune superficială sînt egale. Deci unghiurile de racordare sînt egale cu 120°.

2.179. $R = \frac{r}{\cos\Phi} = \frac{r}{\cos(180 - \theta)} = -\frac{r}{\cos\theta}$, unde θ este unghiul de racordare (fig. 2.179 R). Presiunea adițională creată de curbura meniscului este:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R} = -\frac{2\sigma\cos\theta}{r}.$$

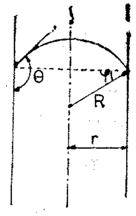

Fig. 2.179.R.

Pentru mercur $\theta > \frac{\pi}{2}$, deci presiunea adițională este pozitivă. Diferența dintre nivele este:

$$\Delta h = -\frac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}, \text{ deci } \cos\theta = -\frac{\Delta h\rho g r}{2\sigma} = -0{,}740.$$

Atunci, $R = -\frac{r}{\cos\theta} = 2$ mm.

2.180. Areometrul scufundat în apă este supus următoarelor forțe: greutatea G, forța de tensiune superficială F_S îndreptată în jos în cazul în care lichidul udă complet pereții areometrului și forța arhimedică F_A îndreptată în sus. În cazul plutirii avem: $G + F_S = F_A(1)$, unde $G = mg$, $F_S = 2\pi r\sigma$ și $F_A = \rho g(V + Ah)$. În aceste relații ρ este densitatea lichidului, V volumul părții necilindrice, A reprezintă aria secțiunii transversale a porțiunii cilindrice, iar h lungimea pînă la care tubul cilindric este scufundat. Adăugînd cîteva picături de alcool se poate spune că densitatea apei nu s-a schimbat. Pentru cele două cazuri relația (1) se scrie: $G + 2\pi r\sigma_1 = \rho g(V + Ah_1)$; $G + 2\pi r\sigma_2 = \rho g(V + Ah_2)$.

Rezultă: $\Delta h = \frac{2}{\rho g r}(\sigma_1 - \sigma_2) = 2{,}4$ mm.

2.181. Deoarece presiunea la nivelul lichidului din vas este nulă rezultă că la înălțimea h presiunea este negativă și egală cu $p = -\rho g h$ (lichidul este tensionat, fig. 2.181 R).

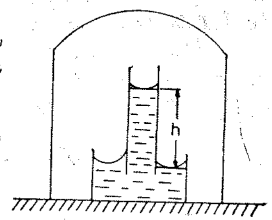

Fig. 2.181.R.

2.182. Cînd tubul este în poziție verticală meniscul superior este concav și presiunea produsă de curbarea meniscului este îndreptată în sus și egală cu $p_1 = \frac{2\sigma}{R_1}$, unde R_1 este raza de curbură a meniscului superior. În cazul în care unghiul de racordare este nul se poate scrie $p_1 = \frac{2\sigma}{r}$. Presiunea hidrostatică a coloanei de lichid este îndreptată în jos și egală cu $p_2 = \rho g h$. Dacă $p_1 > p_2$, presiunea rezultantă este îndreptată în sus și meniscul inferior este concav. Presiunea p_3 produsă de curbura meniscului inferior este în-

dreptată în jos și egală cu $p_3 = \frac{2\sigma}{R_2}$, unde R_2 este raza meniscului inferior. La echilibru $p_1 = p_2 + p_3$ (1). Dacă $p_1 < p_2$, presiunea rezultantă este îndreptată în jos și meniscul inferior va fi convex. Presiunea produsă de meniscul inferior va fi $p_3 = \frac{2\sigma}{R_2}$ și este îndreptată în sus. Se poate scrie că $p_1 + p_3 = p_2$ (2). Dacă $p_1 = p_2$ (3) atunci $p_3 = 0$ și meniscul inferior va fi plat. Prin introducerea datelor numerice se obține :

(a) $R_1 = 0{,}5$ mm și $R_2 = -1{,}52$ mm;
(b) $R_1 = 0{,}5$ mm și $R_2 = 1{,}46$ mm;
(c) $R_1 = 0{,}5$ mm și $R_2 = \infty$.

2.183. Greutatea coloanei de lichid cuprinsă între cele două lame este egală cu suma forțelor capilare ce se exercită de-a lungul liniei de contact a apei cu cele două lame, deci $hdl\,\rho g = 2\sigma l \cos\theta$. Rezultă : $\sigma = \frac{hdg\rho}{2\cos\theta} = 73\cdot 10^{-3}$ N/m.

2.184. Considerînd o lungime l a plăcilor, la echilibru avem $2\sigma l = ld\,\rho gh$, de unde $h = \frac{2\sigma}{d\rho g}$. *Observație*: S-a considerat că unghiul de racordare este $\theta = 0$.

2.185. În figura 2.185R este dată o secțiune orizontală prin plăci. Lichidul se ridică între cele două plăci datorită forțelor de adeziune. La echilibru greutatea stratului de apă este compensată de forța datorită tensiunii superficiale. Notînd cu y înălțimea față de suprafața lichidului (y este perpendicular pe secțiunea arătată în figură) și cu l o lungime oarecare a stratului de apă se poate scrie : $2\sigma l = \rho gy\, 2d\, x$. Dar, $l = \frac{x}{\cos\alpha/2}$ și $d = x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, deci $2\sigma\frac{x}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \rho gy\, 2x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot x$. Rezultă $xy = \frac{\sigma}{\rho g \sin\frac{\alpha}{2}}$, care este ecuația unei hiperbole. *Observație*: În cazul în care unghiul de racordare $\theta \neq 0$ s-ar obține expresia :

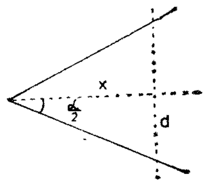

Fig. 2.185.R.

$$xy = \frac{\sigma\cos\theta}{\rho g \sin\frac{\alpha}{2}}.$$

2.6. Transformări de fază

2.186. a) $Q = m_1 c_a (t - t_0) + m_2\lambda_v = 7{,}416\cdot 10^5$J ;

b) $V = \frac{m_2 RT}{\mu p} = 0{,}3$ m^3;

c) $n = \frac{m_2 N_A}{\mu V} = 2\cdot 10^{25}$ molecule/m^3;

d) $\rho = \frac{m_2}{V} = 0{,}6$ kg/m^3;

e) $\bar{p} = \sqrt{3\frac{m_0 RT}{N_A}} = \frac{1}{N_A}\sqrt{3\mu RT} = 2{,}15\cdot 10^{-23}$ kg·m/s,

unde m_0 este masa unei molecule.

2.187. Volumul masei $m = 3$ g ($V_{apă} = 3$ cm^3) este neglijabil față de volumul $V = 10^4$ cm^3 al vasului. Se poate spune deci că gazul suferă o transformare izocoră.
Presiunea finală a aerului va fi :
$p_1 = p_0\frac{T}{T_0} = 1{,}38\cdot 10^5$N/m^2. Presiunea vaporilor saturați ai apei la temperatura $t = 100$°C este $p_s = 1{,}013\cdot 10^5$ N/m^{-2}. Utilizînd aceste date se poate determina masa de apă ce poate fi transformată în vapori în interiorul vasului. Se obține : $m_v = \mu_{H_2O}\cdot\frac{pV}{RT} = 5{,}9$ g. Cum masa de vapori ce poate exista în interiorul vasului este mai mare decît masa de apă din vas, rezultă că toată apa se va vaporiza, astfel încît presiunea vaporilor nesaturați ai apei din vas va fi : $p_v = \frac{m}{\mu_{H_2O}}\frac{RT}{V} = 0{,}516\cdot 10^5$ N·m^{-2} $< p_S$. Presiunea totală din vas va fi : $p = p_1 + p_v = 1{,}9\cdot 10^5$ N·m^{-2}.

2.188. a) $Q = mc_g(0 - t_1) + m\lambda_g + mc_a(t_f - 0) + m\lambda_v + m_1 c_N(t_f - t_1)$, unde masa m_1 de azot se obține din legea gazelor perfecte $m_1 = \frac{\mu_N p V_1}{RT} = 0{,}042$ kg. Numeric, $Q \simeq 10$ kJ.

b) Volumul final al amestecului, rezultă din legea gazelor perfecte $pV = (\nu_a + \nu_N)\, RT = \left(\frac{m}{\mu_a} + \frac{m_1}{\mu_N}\right) RT$ adică

$$V = \left(\frac{m}{\mu_a} + \frac{m_1}{\mu_N}\right)\frac{RT}{p} = 0{,}049 \text{ m}^3.$$

c) $L = p(V_f - V_i) = p(V - V_1) = 1621$ J.

d) Prin condensarea a jumătate din vaporii de apă, numărul molilor rămași se reduce la jumătate, încît:

$$V = \frac{0,5\ \nu RT}{p} \simeq 1,53 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3.$$

2.189. a) Din $Q_{abs} = Q_{ced}$, rezultă

$m_2c_g(0 - t_2) + m_2\lambda_g + m_2c_a(\theta - 0) = m_1c_a(t_1 - \theta)$, sau numeric $\theta = 44,8°\text{C}$.

b) $Q_u = (m_1 + m_2)\,[c_a(\theta_3 - \theta) + \lambda_v] = 1,3 \cdot 10^6$J.

c) $\eta = \frac{Q_u}{Q_c}$; $Q_c = \frac{Q_u}{\eta} = mq$; $m = \frac{Q_u}{\eta q} = 0,43$ kg.

d) $p_1V_1 = p_2V_2$; $V_2 = \frac{p_1V_1}{p_2} = \frac{\frac{m}{\mu}RT_1}{p_2} = 9,47\ \text{m}^3$.

e) $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4$; $\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_0} \frac{m_gc_g\,\text{d}T}{T} =$

$= m_gc_g \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)$; $\Delta S_2 = \frac{m_gc_g}{T_0}$; $\Delta S_3 = m_ac_a \ln \frac{\theta + T_0}{T_0}$; $\Delta S_4 =$

$= m_1c_1 \ln \frac{\theta + T_0}{T_1}$. Se obține numeric: $\Delta S_t = 4,43$ J · K.

2.190. Căldura cedată de apă pentru a ajunge la 0°C este $Q_1 = m_1c_a(t - 0) = 104\,500$ J. Căldura absorbită de gheață pentru a-și ridica temperatura de la $t_2 = -15°$C la 0°C este $Q_2 = m_2c_g(0 - t_2) = 315\,000$ J. Căldura cedată prin înghețarea apei este: $Q_3 = m_1\lambda_g = 1\,670\,000$ J. Deoarece $Q_1 + Q_3 > Q_2$ rezultă că la echilibrul termic se va obține un amestec de apă și gheață. Înseamnă că numai o parte din apă va îngheța la 0°C și toată gheața inițială va ajunge la 0°C. Cantitatea de căldură de care are nevoie gheața m_2 să-și ridice temperatura la 0°C, o primește integral din răcirea apei m_1 pînă la 0°C și din înghețarea unei părți din apă (x), astfel încît:

$$Q_2 = Q_1 = x\lambda_g. \quad \text{Rezultă} \quad x = \frac{Q_2 - Q_1}{\lambda_g} = 0,63 \text{ kg}$$

Amestecul final conține la 0°C:

$$m_{apă} = m_1 - x = 4,37 \text{ kg}; \ m_g = m_2 + x = 10,63 \text{ kg}.$$

2.191. Căldura necesară apei pentru a se încălzi pînă la temperatura de fierbere $t_f = 100°$C este $Q_p = m_1c_1(t_f - t_1) = 418$ kJ. Căldura cedată prin răcirea fierului pînă la t_f este: $Q_c = m_2c_2(t_2 - t_f) = 500$ kJ. Diferența dintre cele două cantități de căldură este folosită pentru a vaporiza o masă m_V de vapori și pentru a efectua lucru mecanic împotriva presiunii atmosferice $Q_c - Q_p = m_v\lambda_v + p_0Sh(1)$, unde p_0 este presiunea atmosferică. Ecuația de stare este valabilă și pentru vapori saturanți, deci: $p_0Sh = \frac{m_v}{\mu}RT_f$ (2). Din (1) și (2) obținem: $m_v = \frac{Q_c - Q_p}{\lambda_v + RT_f/\mu} = 33,8$ g. Introducînd m_v în (1) avem: $h = \frac{1}{p_0S}\frac{m_v}{\mu}RT_f = 0,57$ m.

2.192. a) $p = p_0 + \frac{mg}{S} = 2 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2$, $pV = \nu RT$, unde $V = Sh_0$, rezultă $h_0 = \frac{\nu RT}{pS} = 0,2543$ m.

b) Se calculează căldura Q_a necesară apei să atingă 100°C și Q_{aer} necesară aerului să ajungă la aceeași temperatură într-o transformare izobară. Se compară $Q_a + Q_{aer}$ cu căldura Q degajată de agent în timp de 20 minute,

$$Q_a + \theta_{aer} = mc_a\Delta\theta + \nu C_p\Delta\theta, \ \text{iar} \ Q = Dtc\,\Delta\theta'.$$

Se obține că: $Q > Q_a + Q_{aer}$. Procesul de încălzire se desfășoară în două faze. Temperatura apei din recipient și a aerului din vas crește de la θ_0 pînă la 100°C, înălțimea variind în timp. Legea de variație o obținem din ecuația calorimetrică $Dtc(\theta_1 - \theta_2) = (m_ac_a + \nu\mu c_p)(\theta - \theta_0)$.
Rezultă temperatura aerului la momentul t,

$$\theta = \theta_0 + \frac{Dc(\theta_1 - \theta_2)t}{m_ac_a + \nu\mu c_p}, \ \text{sau} \ \theta \simeq \theta_0 + 0,1\,t.$$

Deci temperatura aerului variază liniar în timp. Deoarece aerul suferă o transformare izotermă se poate scrie $h = h_0\ \frac{T}{T_0} =$

$= h_0 \dfrac{300 + 0,1\,t}{273}$. Variația lui h este liniară în timp pînă în momentul atingerii temperaturii de 100°C. Această temperatură este atinsă după timpul $t = \dfrac{\theta - \theta_0}{0,1} = 730$ secunde = 12 min.10 s.

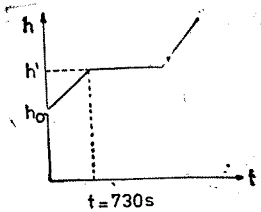

Fig. 2.192.R.

După acest timp pistonul atinge înălțimea $h = h_0 \dfrac{300 + 73}{273} = 0,3474$ m. Reprezentarea grafică $h = h(t)$ este dată în figura 2.192.R.

c) $m_v\lambda_v = Dtc(\theta_1 - \theta_2)$.

Rezultă : $m_v = \dfrac{Dtc(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda_v} = 2,2 \cdot 10^{-3}$ kg/s.

2.193. $\eta = \dfrac{Q_{abs}}{Q_{ced}} = \dfrac{m_a c_a\,\Delta\theta}{m_v\lambda_v + m_v c_a(100 - t_2)}$, unde $m_a = \rho_a V = \dfrac{p\mu}{RT}V$, iar $c_{aer} = \dfrac{7}{2}\dfrac{R}{\mu}$ (considerînd că încălzirea aerului se face izobar), încît $m_a c_{aer} = \dfrac{7pV}{2T}$. În final $m_v = \dfrac{7pV\,\Delta\theta}{2\eta T[\lambda_v + c_a(100 - t_2)]} = 10,5$ kg.

b) $\eta = \dfrac{Q_u}{Q_c} = \dfrac{P\tau}{m_v[\lambda_v + c_a(100 - t_2)]} = \dfrac{P}{D_m[\lambda_v + c_a(100 - t_2)]}$, căci $D_m = \dfrac{m}{V}$. Numeric, rezultă

$$D_m = \frac{P}{\eta[\lambda_v + c_a(100 - t_2)]} = 1,74 \cdot 10^{-3}\ \text{kg/s}.$$

c) $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}} = 567$ m/s ; $N = \dfrac{m_v}{\mu}N_A = 2,18 \cdot 10^{26}$ molecule.

2.194. a) $\eta = \dfrac{Q_u}{Q_c} = \dfrac{(m_a c_a + C)(t_f - t_1)}{D_m \tau q}$, de unde

$$\tau = \frac{(m_a c_a + C)(t_f - t_1)}{\eta D_m q} = 2140\ \text{s}.$$

b) $\eta = \dfrac{Q'_u}{Q'_c} = \dfrac{m_v\lambda_v}{D_m \tau q} = \dfrac{D'_m\lambda_v}{D_m q}$, încît $D'_m = \dfrac{\eta D_m q}{\lambda_v} = 0,45 \cdot 10^{-2}$ kg/s.

c) $m_g c_g(\theta - t_2) + m_g\lambda_g = D'_m\tau'(\lambda_v + 100\,c_a)$, sau

$$\tau' = \frac{m_g c_g(\theta - t_2) + m_g\lambda_g}{D'_m(\lambda_v + 100\,c_a)} = 315\ \text{s}.$$

d) $m_g c_g(0 - t_2) + m_g\lambda_g + m_g c_a(\theta - 0) = D'_m\tau''[\lambda_v + (100 - \theta)\,c_a]$ astfel că : $\tau'' = \dfrac{m_g c_g t_2 + m_g\lambda_g + m_g c_a\theta}{D'_m[\lambda_v + (100 - \theta)\,c_a]} = 361,5$ s.

$$v = \frac{\Delta\theta}{\Delta\tau} = \frac{\Delta\theta}{\tau'' - \tau'} = 0,2°\text{C/s}.$$

2.195. a) $\rho = \dfrac{m_1}{V_1} = \dfrac{p_1\mu}{RT_1} = 5,77$ kg/m³.

b) $\eta = \dfrac{P_u \cdot \tau}{V_{on}q}$, unde $\dfrac{p_0 V_{01}}{T_0} = \dfrac{p_1 V_1}{T_1}$, și $\dfrac{p_0 V_{02}}{T_0} = \dfrac{p_2 V_1}{T_1}$ iar $V_{om} = V_{01} - V_{02} = \dfrac{V_1}{p_0} \cdot \dfrac{T_0}{T_1}(p_1 - p_2) = 72,8 \cdot 10^{-3}$ m³. Deci $\eta = \dfrac{P_u\tau}{\dfrac{V_1}{p_0} \cdot \dfrac{T_0}{T_1}(p_1 - p_2)q}$

încît $\tau = \dfrac{\eta q}{P_u} \cdot \dfrac{V_1}{p_0} \cdot \dfrac{T_0}{T_1}(p_1 - p_2) = 77,89$ s.

c) $Q_{abs} = Q_{cons}$, $mc_a(\theta_2 - \theta_1) + m\lambda_v = V_{0n}q$.

Deci : $m = \dfrac{V_{0n}q}{c_a(\theta_2 - \theta_1) + \lambda_v} = 0,24$ kg.

2.196. a) $Q_t = mc_g(t_2 - t_1) + m\lambda_g + mc_a(t_3 - t_2) + m\lambda_v + \dfrac{m}{\mu}C_p(t_4 - t_3) = 615,6$ kJ.

b) $p_0 V_4 = \dfrac{m}{\mu}RT_4$, de unde $V_4 = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT_4}{p_0} = 0,36$ m³.

c) $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \Delta S_4 + \Delta S_5$ unde,

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_2}\frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2}\frac{mc_g\,dT}{T} = mc_g \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = 31,95\ \text{J/K};$$

$$\Delta S_2 = \frac{mc_g}{T_2} = 243\ \text{J/K};\quad \Delta S_3 = \int_{T_2}^{T_3}\frac{mc_a\,dT}{T} = mc_a \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) = 261,2\ \text{J/K}.$$

$$\Delta S_4 = \frac{m\lambda_v}{T_3} = 1233,2\ \text{J/K};\quad \Delta S_5 = mc_p \ln\left(\frac{T_4}{T_3}\right) = 303,8\ \text{J/K},$$

iar $\Delta S_t = 2079,15$ J/K.

2.197. Din $Q_{ced} = Q_{abs}$, adică, $m_g\lambda_g + m_2c_e\,(t_2 - t_0) = m_2\lambda_e$, rezultă $m_g = \frac{m_2[\lambda_e - c_e(t_2 - t_0)]}{\lambda_g} = 1$ kg. În vas se va afla 1 kg gheață și 1 kg apă.

2.198. a) Din lucrul mecanic efectuat de gaz:

$$L_{izobar} = p_0(V - V_0) = p_0V_0\left(\frac{T}{T_0} - 1\right), \text{ rezultă}$$

$$T = T_0\left(1 + \frac{L}{p_0V_0}\right) = 333 \text{ K}, \text{ sau } t = 60°\text{C}.$$

b) $Q_{cedat} = Q_{absorbit} = m_2\lambda_g + (m_1 + m_2)\,c_a(t - t_0) + \nu_{azot}C_p\,(t - t_0) = 5632$ kJ.

c) $Q_{cedat} = x[\lambda_v + c_{apă}\,(t_1 - t)]$, de unde

$$x = \frac{Q_{cedat}}{\lambda_v + c_{apă}\,(t_1 - t)} = 2{,}33 \text{ kg}.$$

2.199. a) Viteza de curgere a apei rezultă din legea lui Bernoulli $v = \sqrt{2gh} = 5$m/s.

$$D_V = \frac{V}{t} = \frac{Sl}{t} = S.v = 5\cdot10^{-4}\,\text{m/s}\,; \quad D_m = \rho D_V = 5\cdot10^{-1}\,\text{kg/s}$$

$m = D_m\tau = 6$ kg.

b) $Q_u = mc(t_2 - t_1) + \frac{10\text{ m}}{100}\lambda_v = 3{,}2\cdot10^6$ J,

$$\eta = \frac{Q_u}{xq}, \text{ deci } x = \frac{Q_u}{q\eta} = 0{,}145 \text{ kg}.$$

c) Din legea gazelor perfecte $p_2V_2 = \frac{m}{10\mu}\cdot RT$ se obține

$V_2 = \frac{mRT}{10\,\mu p_2} = 3{,}3$ m³.

2.200. Variația entropiei este dată de suma variațiilor entropiei pentru încălzirea gheței pînă la $t_0 = 0$°C, exprimată prin $\int_{T_1}^{T_0} mc_g\frac{dT}{T} = mc_g\ln\frac{T_0}{T_1}$, pentru topirea gheței, $\frac{m\lambda_g}{T_0}$ (procesul are loc la temperatură constantă), pentru încălzirea apei de la $t_0 = 0$°C la $t_2 = 100$°C, $mc_{apă}\ln\frac{T_2}{T_1}$ și pentru vaporizarea apei, $\frac{m\lambda_{vaporizare}}{T_2}$ (procesul are loc la temperatura constantă).

$$\Delta S = m\left(c_g - \ln\frac{T_0}{T_1} + \frac{\lambda_g}{T_0} + c_{apă}\ln\frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda_v}{T_2}\right) = 88 \text{ J/K}.$$

2.201. Scriind că $Q_{cedat} = Q_{primit}$, adică $m_g[c_g(0 - t_0) + \lambda_g + c_a(t_f - 0)] + m_cc_a\,(t_f - t_0) = m_p[c_l\,(t_1 - t_t) + \lambda_p + c_s\,(t_t - t_f)]$, rezultă

$$\lambda_p = \frac{m_g[c_g(0 - t_0) + \lambda_g + c_a(t_f - 0)] + m_cc_a(t_f - t_0) - m_p[c_lt_1 - t_t) + c_s(t_t - t_f)]}{m_p} =$$

$$= 20{,}9 \text{ kJ/K}.$$

2.202. a) În procesul de încălzire al alamei, căldura absorbită este repartizată componenților astfel încît: $Q = Q_1 + Q_2$ sau $mc\Delta t = (m_1c_1 + m_2c_2)\,\Delta t$, încît $c = \frac{m_1}{m}c_1 + \frac{m_2}{m}c_2 = p_1c_1 + p_2c_2 = 0{,}6c_1 + 0{,}4\,c_2 = 396{,}6$ J/kg · K.

b) Din ecuația calorimetrică $m_0c_g(0 - t_0) + xc_g + C(0 - t_0) = mc(t - 0)$ rezultă: $x = \frac{mc(t - 0) - m_0c_g(0 - t_0) - C(0 - t_0)}{\lambda_g} = 0{,}090$ kg.

2.203. Înainte de a fi introdusă în calorimetru piesa are densitatea $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\rho_0}{1 + \gamma t}$, unde t reprezintă temperatura inițială a piesei. Rezultă $t = \frac{V\rho_0 - m}{\gamma m} = 1305$°C. Cantitatea de gheață care se topește se determină din ecuația calorimetrică: $M\lambda_g = mc\,\Delta t$, unde λ_g este căldura latentă de topire a gheței, deci $M = \frac{mc\,\Delta t}{\lambda_g} = 0{,}63$ kg.

2.204. Căldura necesară evaporării se obține numai din căldura latentă eliberată de apa care îngheață. Notînd cu m_1 masa apei ce se transformă în gheață și cu m_2 masa apei ce se evaporă avem: $m_1 + m_2 = m$ și $m_1\lambda_1 = m_2\lambda_2$, unde λ_1 este căldura latentă de topire a apei, iar λ_2 este căldura latentă de vaporizare. Din cele două relații se obține:

$$m_1 = \frac{m\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0{,}87 \text{ m}.$$

2.205. $m_1\lambda_1 + (m_a + m_1)c\,\theta = (m_a - m_1)[(\lambda_2 + c(100 - \theta)]$

a) $0 < \theta < 100°C$. $m_1 = \dfrac{\lambda_2 + c(100 - 2\theta)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 100\,c}\, m_a$,

$$m_2 = \frac{\lambda_1 + 2\theta c}{\lambda_1 + \lambda_2 + 100\,c}\, m_a.$$

b) $\theta = 0°C$; $m_1 = \lim\limits_{\theta \to 0} m_a \dfrac{\lambda_2 + c(100 - 2\theta)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 100c} = 890{,}3$ g;

$$m_2 = m_a - m_1 = 0{,}1097 \text{ kg}.$$

c) $\theta = 100°C$, $m_1 = \lim\limits_{\theta \to 100} m_a \dfrac{\lambda_2 + c(100 - 20)}{\lambda_1 + \lambda_2 + 100c} = 612{,}1$ g.

$$m_2 = m_a - m_1 = 0{,}3879 \text{ kg}.$$

2.206. $m_c = \dfrac{m[c_1(0 - t_0) + \lambda_1 + c_2(t - 0) + \lambda_2]}{\eta q} = 500$ g.

2.207. a) Deplasarea pistonului începe după topirea întregii cantități de gheață. Scriind ecuația calorimetrică $x\lambda = m_1 c_1 t_1$, rezultă $x = \dfrac{m_1 c_1 t_1}{\lambda}$.

b) Ecuațiile calorimetrice pentru transformarea la presiune constantă, respectiv la volum constant se scriu:

$$x\lambda + (m'c_1 + C + C')t + mc_p t = m_1'c_1(t_1 - t) \text{ și}$$

$$x\lambda + (m'c_1 + C + C')t + mc_v t = m_1''c_1(t_1 - t)$$

Scăzînd cele două ecuații se obține:

$(mc_p - mc_v)t = (m_1' - m_1'')c_1(t_1 - t)$. Membrul drept reprezintă chiar lucrul mecanic efectuat în transformarea izobară.

c) În transformarea izobară $L = p\,\Delta V = p(V - V_0)$. Din legea transformării izobare rezultă:

$$V_0 = \Delta V \cdot \frac{T_0}{T - T_0} \text{ unde } T_0 = 273{,}15 \text{ K}.$$

Deoarece $\Delta V = \dfrac{L}{p} = \dfrac{m_1 c_1(t_1 - t)}{p_0 + \dfrac{m_0 g}{S}}$, rezultă

$V_0 = \dfrac{m_1 c_1(t_1 - t)}{p_0 + \dfrac{m_0 g}{S}} \cdot \dfrac{T_0}{T - T_0}$. Masa m a gazului este

$$m = \nu\mu = \frac{p_0 V_0}{RT} \cdot \mu.$$

d) Variația energiei interne este:

$$\Delta U = mc_v t = m_1''c_1(t_1 - t) - m_1 c_1 t_1 - (m'c_1 + C + C')t.$$

2.208. În cazul introducerii apei la 10°C o parte a gheții se transformă în apă pe baza căldurii primite de la apa care ajunge la 0°C. Se poate scrie $Q_1 = m_1 c_1\,\Delta t_1 = Kn_1$, unde K este un coeficient de proporționalitate iar n_1 este numărul de diviziuni cu care s-a deplasat nivelul mercurului.

Rezultă $K = \dfrac{m_1 c_1\,\Delta t_1}{n_1} = 83{,}7$ J/div. Introducînd bila de cupru se poate scrie $Q_2 = m_2 c_2\,\Delta t_2 = Kn_2$, unde n_2 este numărul de diviziuni cu care a scăzut din nou nivelul mercurului, iar $\Delta t_2 = t_2$.

Se obține: $c = \dfrac{Kn_2}{m_2\,\Delta t_2} = 376{,}2$ J/kg · K.

2.209. a) Deoarece $L = p\,\Delta V$, $L = 0$ dacă $\Delta V = 0$. Dar, $\Delta V = \Delta V_{\text{gheață}} + \Delta V_{\text{apă}}$, unde

$$\Delta V_g = V_0\gamma(0 - t) = \frac{m}{\rho_0}\gamma(0 - t), \text{ iar } \Delta V_{\text{apă}} = -\,xmv.$$

Atunci, $x = -\dfrac{\gamma t}{v\rho_0} = 5 \cdot 10^{-4}$.

b) $\dfrac{Q}{m} = c_g\,(0 - t) + x\lambda_g = 10{,}667$ kJ.

2.210. a) Din ecuația de stare: $m_3 = \dfrac{p_1 V_1 \mu}{RT_2} = 3$ g.

b) Ecuația calorimetrică se scrie:

$m_1 c_a(t_1 - t_3) = m_2(\lambda_1 + c_a t_3) + m_3 c_v(100 - t_2)$ și rezultă:

$$t_3 = \frac{m_1 c_a t_1 - m_2\lambda_1 + m_3 c_v t_2}{c_a(m_1 + m_2) + m_3 c_v} = 25°C.$$

c) $p_2 = p_1 \dfrac{T_3}{T_1} = 0{,}46 \cdot 10^4$ N · m^{-2}.

d) $Q_1 = (m_1 + m_2)[c_a(100 - t_3) + \lambda_2] = 10{,}296$ MJ.

e) $Q_2 = m_3 c_v(100 - t_2) = 235{,}08$ J.

2.211. a) $m_1c_a(t_1 - t) = m_2(\lambda + c_a t)$, rezultă

$$t = \frac{m_1c_at_1 - m_2\lambda}{c_a(m_1 + m_2)} = 25°C.$$

b) $Mc(t_2 - t_1) = c_a(m_1 + m_2)(t_1 - t)$, de unde

$$t_2 = t_1 + \frac{c_a(m_1 + m_2)(t_1 - t)}{Mc} = 147{,}5°C.$$

c) $Q = Mc(t_2 - t_1) = 10{,}84$ kJ;

d) $l_0 = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho_0}} = 3$ cm.

e) $V_1 = V_0(1 + \gamma t_1)$, $V_2 = V_0(1 + \gamma t_2)$, unde $\gamma = 3\alpha$.
Se obține $\alpha = \frac{\rho_0 \Delta V}{3M(t_2 - t_1)} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{grd}^{-1}$,
unde $\Delta V = V_2 - V_1$.

2.212. a) $Q = m_g\lambda_t = 2672$ J;

b) $Q_t = m_ac_at_v + m_g(\lambda_t + c_at_v) + (m_a + m_g)\lambda_v \simeq 291$ kJ;

c) $m = \frac{Q_t}{\eta q} = 12{,}4$ g.

d) $V = \frac{(m_a + m_g)RT_v}{p\mu} = 19\ \mathrm{dm}^3$.

2.213. a) $mc_a(t_1 - \theta) = m_g[c_g(0 - t_2) + \lambda_g + c_a\theta]$,
rezultă: $\theta = \frac{mc_a t_1 - m_g(\lambda_g - c_g t_2)}{c_a(m + m_g)} = 0°C$.

b) $P = \frac{c_a(m + m_g)\cdot(100 - \theta)}{\eta t} = 150$ W.

2.214. a) Din ecuația de stare: $\rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0}$ (1). Aceeași ecuație scrisă pentru cele două mase de ozon este:

$$\frac{G_1 - G_{vas}}{g} = \frac{pV\mu_1}{RT_0}\ (2) \text{ și } \frac{G_2 - G_{vas}}{g} = \frac{p_2V\mu_1}{RT_0}\ (3).$$

Din (2) și (3) se obține: $\frac{\mu}{RT_0} = \frac{(G_1 - G_2)}{Vg(p_1 - p_2)}$ (4).

Introducînd (4) în (1) rezultă: $\rho_0 = \frac{(G_1 - G_2)p_0}{Vg(p_1 - p_2)}$.

b) Căldura cedată de $\frac{m}{\mu_1}$ moli de ozon este preluată de $\frac{m}{\mu_2}$ moli de oxigen. Căldura cedată de ozon este $Q_c = \frac{m}{\mu_1}q$, iar căldura absorbită de oxigen $Q_a = \frac{m}{\mu_2}C_v(T_2 - T_1)$. Avem $\frac{m}{\mu_1}q = \frac{m}{\mu_2}C_v(T_2 - T_1)$ și temperatura finală a oxigenului este: $T_2 = T_1 + \frac{2q\mu_2}{5R\mu_1}$. Ecuația de stare în starea inițială și finală se va scrie: $p_2V = \frac{m}{\mu_1}RT_1$ și $p'V = \frac{m}{\mu_2}RT_2$. Prin împărțire obținem: $\frac{p'}{p_2} = \frac{\mu_1T_2}{\mu_2T_1}$ sau $\frac{p'}{p_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2 \cdot T_1}\left(T_1 + \frac{2q\mu_2}{5R\mu_1}\right) = \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{2q}{5RT_1}$; Deci:

$$p' = p_2\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{2q}{5RT_1}\right).$$

c) Deoarece o parte din apă se vaporizează, ecuația de stare se scrie: $2p_0V = \left(\frac{m}{\mu_2} + \frac{m_v}{\mu}\right)RT_3$, de unde rezultă masa de apă vaporizată: $m_v = \mu\left(\frac{2p_0V}{RT_3} - \frac{m}{\mu_2}\right)$. Temperatura finală fiind T_3, ecuația calorimetrică se scrie: $\frac{m}{\mu_2}C_v(T_3 - T) = m_v\lambda_v$, de unde $T = T_3 - \frac{2m_v\lambda_v\mu_2}{5mR}$.

SE MAI POT CONSULTA

1. C. Buzatu, *Culegere de probleme de fizică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1963.
2. B. Bukhovtsev, V. Krivchenkov, G. Myakishev, V. Shalnov, *Problems in Elementary Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1971.
3. T. Creţu, D. Anghelescu, I. Vieroşeanu, *Probleme de fizică pentru admiterea în învăţămîntul superior*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.
4. Colectivul Catedrei de Fizică, I.P.B. *Probleme de fizică pentru admiterea în Institutul Politehnic* (Litografia I.P.B., 1971).
5. I. Druică-Zeletin, A. Popescu, *Culegere de probleme de mecanică şi acustică*, Edit. tehnică, 1974.
6. R. Feynman, *Fizica modernă*, vol. III, Edit. tehnică, Bucureşti, 1970.
7. M. Gall, A. Hristev, *Probleme date la Olimpiadele de fizică*, Edit. didactică şi pedagogică, 1978.
8. O. Gherman, E. Magyari, L. Meder, L. Dalin, L. Tătar, F. Uhir, *Probleme de fizică pentru liceu*, Edit. Scrisul Românesc, Craiova, 1975.
9. C. Ghinsburg, L. Levin, M. Rabinovici, D. Sivuhin, E. Ceterikova, *Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală*, Edit. tehnică (traducere din limba rusă), 1951.
10. R. Grigorovici, M. Oncescu, *Mărimi şi unităţi în fizică*, vol. II, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.
11. A. Hristev, *Probleme de căldură, fizică moleculară şi termodinamică pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învăţămîntul superior*, Edit. tehnică, 1974.
12. M. Ignat, *Întrebări şi exerciţii de termodinamică şi fizică statistică*, Edit. ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1981.
13. G. Ionescu, V. Focheanu, C. Cănn, *Probleme de fizică date la concursurile de admitere în învăţămîntul superior pentru ingineri şi subingineri*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1978.
14. I. Irodov, I. Saveliev, O. Zamcha, *Recueil de problèmes de physique générale*, Edit. Mir, Moscow, 1976.
15. I. Iscrulescu, Gh. Ispăşoiu, V. Petrescu, *Sistemul internaţional de unităţi de măsură*. Edit. tehnică, 1970.
16. C. Maican, A. Negulescu, D. Tănase, V. Atanasiu, *Culegere de probleme de fizică pentru învăţămîntul mediu*, Edit. didactică şi pedagogică, 1963.
17. C. Necşoiu, *Culegere de probleme de fizică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
18. M. Oncescu, *Mărimi şi unităţi de fizică*, vol. I. Edit. tehnică Bucureşti, 1955.
19. C. Plăviţiu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borşan, V. Dima, C. Stănescu, V. Lupaş, L. Ionescu, *Probleme de mecanică fizică şi acustică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
20. C. Plăviţiu, I. Petrea, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borşan, V. Dima, R. Moldovan, *Fizică moleculară, probleme*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968
21. R. Sfichi, *Probleme de limită în extrem în fizică*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucuresti, 1979.
22. S. Strelkov, I. Elţiu, I. Iakolev, *Culegere de probleme pentru cursul de fizică generală*, Edit. tehnică, Bucureşti (traducere din limba rusă), 1952.
23. V. Zubov, V. Shalnov, *Problems in Physics*, Mir, Publishers, Moscow, 1974.